

NOTE SUR LES OPÉRATIONS DE GROTHENDIECK ET LA RÉALISATION DE BETTI

JOSEPH AYOUB

*Institut für Mathematik, Universität Zürich, Winterthurerstrasse 190,
CH-8057 Zürich, Switzerland (joseph.ayoub@math.uzh.ch) and
CNRS, LAGA Université Paris 13, 99 avenue J. B. Clément,
93430 Villetaneuse, France*

(Reçu le 9 septembre 2008 ; révisé le 5 décembre 2008 ; accepté le 16 décembre 2008)

Résumé Le but de cette note est de prouver que la réalisation de Betti des motifs est compatible avec les six opérations de Grothendieck et les foncteurs cycles proches qui, dans le monde motivique, ont été étudiés par l'auteur. On reprend d'abord la construction de la réalisation de Betti. On établit ensuite des critères abstraits qui, appliqués à la réalisation de Betti, fournissent les compatibilités souhaitées, sauf celle qui concerne les foncteurs cycles proches. Ces derniers seront traités dans une section à part.

Abstract The purpose of this note is to show that the Betti realization of motives is compatible with Grothendieck's six operations and the nearby cycles functors, which in the motivic world, were previously studied by the author. We first review the construction of the Betti realization. Then, we establish some general criteria which, applied to the Betti realization, give the compatibilities we seek except for the one concerning the nearby cycles functors. The latter will be treated in a separate section.

Mots clés : motifs ; réalisation de Betti ; les six opérations de Grothendieck ; formalisme des cycles évanescents ; catégories de modèles

Keywords : motives; Betti realizations; Grothendieck's six operations; vanishing cycles formalism; model categories

AMS 2010 *Mathematics subject classification*: Primary 14F25; 14F42; 18G55
Secondary 14F20; 18F10; 18F20; 18G10

Table des matières

1. Catégories homotopiques des X -espaces analytiques	226
2. Réalisation de Betti et fonctorialité élémentaire	239
3. Morphismes de 2-foncteurs homotopiques stables	242
4. Compatibilité de la réalisation de Betti avec les foncteurs cycles proches	252
Références	263

Introduction

Les six opérations de Grothendieck et les foncteurs cycles proches, d'abord inventés pour les faisceaux étales et ℓ -adiques [1, 7], existent dans d'autres contextes, notamment

pour les faisceaux abéliens sur des espaces topologiques localement compacts (voir par exemple [11]), pour les modules de Hodge mixtes au sens de Saito [14], mais aussi pour les motifs au sens de Morel et Voevodsky [2, 3]. Une question naturelle se pose alors : comment ces opérations se comportent vis à vis des réalisations (ℓ -adique, Betti, Hodge, etc.) des motifs. Dans cette note, on se propose de répondre à cette question dans le cas de la réalisation de Betti.

Étant donné un schéma de type fini X défini sur un corps k plongé dans \mathbb{C} , on note X^{an} l'ensemble $X(\mathbb{C})$ muni de sa structure naturelle d'espace analytique complexe. On note $\mathbf{D}(X^{\text{an}})$ la catégorie dérivée des faisceaux de groupes abéliens sur X^{an} (pour la topologie usuelle). On note $\mathbf{SH}(X)$ la catégorie homotopique stable des X -schémas et $\mathbf{SH}^{\text{ct}}(X)$ la sous-catégorie pleine des objets compacts (voir [2, Définition 2.1.18]).

La réalisation de Betti (relativement à X), dont la construction sera donnée plus loin, est un foncteur monoïdal symétrique et unitaire $\text{Betti}'_X : \mathbf{SH}(X) \rightarrow \mathbf{D}(X^{\text{an}})$. Notons Betti'_X la restriction de ce foncteur à $\mathbf{SH}^{\text{ct}}(X)$. Étant donné un morphisme $f : Y \rightarrow X$ de k -schémas quasi-projectifs, on construira des isomorphismes canoniques

$$(f^{\text{an}})^* \circ \text{Betti}'_X \simeq \text{Betti}'_Y \circ f^* \quad \text{et} \quad \text{Betti}'_X \circ f_* \simeq f_*^{\text{an}} \circ \text{Betti}'_Y, \\ f_!^{\text{an}} \circ \text{Betti}'_Y \simeq \text{Betti}'_X \circ f_! \quad \text{et} \quad \text{Betti}'_Y \circ f^! \simeq (f^{\text{an}})^! \circ \text{Betti}'_X.$$

On montrera ensuite que la transformation naturelle

$$\text{Betti}'_X \underline{\text{Hom}}(A, B) \longrightarrow \underline{\text{Hom}}(\text{Betti}'_X(A), \text{Betti}'_X(B))$$

est inversible pour tout A et B dans $\mathbf{SH}^{\text{ct}}(X)$. Enfin, étant donné un morphisme de k -schémas quasi-projectifs $f : X \rightarrow \mathbb{A}_k^1$, on construira un isomorphisme naturel $\Psi_{f^{\text{an}}} \circ \text{Betti}'_{X_\eta} \simeq \text{Betti}'_{X_\sigma} \circ \Psi_f$ où $X_\eta = f^{-1}(\mathbb{G}_m)$ et $X_\sigma = f^{-1}(o)$.

La présente note se situe dans la continuation de la thèse de l'auteur [2, 3] dont on reprend les notations. Les références à cette thèse étant nombreuses, le lecteur est avisé d'avoir sous la main une copie de [2] et [3]. Certains résultats de cette note sont utilisés dans [5].

1. Catégories homotopiques des X -espaces analytiques

Dans cette sous-section, on reprend la construction de Morel et Voevodsky [12] de leurs catégories homotopiques stables des schémas en remplaçant les schémas par les espaces analytiques complexes. On verra que la théorie ainsi obtenue est équivalente, dans le cas absolu, à la théorie de l'homotopie stable classique. Dans toute la suite, un *espace analytique complexe* est un « complex space » au sens de [9] que l'on supposera implicitement dénombrable à l'infini (i.e., égal à une réunion dénombrable de sous-ensembles compacts).

Une catégorie de coefficients est une catégorie de modèles \mathfrak{M} munie d'un ensemble d'objets $\mathcal{E} \subset \text{Ob}(\mathfrak{M})$ et vérifiant les conditions suivantes :

- (1) \mathfrak{M} est propre à gauche, présentable par cofibrations et stable ;
- (2) les équivalences faibles et les fibrations de \mathfrak{M} sont stables par coproduits et colimites filtrantes ;

- (3) les objets de \mathcal{E} sont homotopiquement compacts et engendrent la catégorie triangulée avec sommes infinies $\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})$.

Il s'agit là d'une notion légèrement plus restrictive que celle adoptée dans [3, Définition 4.4.23] auquel on renvoie le lecteur pour les définitions des termes employés ci-dessus. Dans la suite, une catégorie de coefficients \mathfrak{M} sera fixée une fois pour toute. On supposera que les objets appartenant à \mathcal{E} sont cofibrants et que \mathcal{E} est stable (à isomorphisme près dans $\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})$) par les foncteurs de suspension et cosuspension. Le lecteur ne perdra rien à supposer que \mathfrak{M} est la catégorie des complexes de groupes abéliens munie de sa structure projective ou celle des spectres symétriques munie de sa structure projective stable.

Définition 1.1. Soit X un espace analytique complexe. On note \mathbf{AnSm}/X la catégorie dont les objets sont les X -espaces analytiques lisses (i.e., les morphismes lisses d'espaces analytiques complexes). On munit cette catégorie de la topologie usuelle (qu'on abrégera par usu) engendrée par la prétopologie dont les familles couvrantes sont les $(V_i \rightarrow Y)_{i \in I}$ avec Y un X -espace analytique lisse et V_i des ouverts de Y vérifiant $Y = \bigcup_{i \in I} V_i$.

Par [3, Proposition 4.4.16], on peut munir la catégorie $\mathbf{PreShv}(\mathbf{AnSm}/X, \mathfrak{M})$ d'une structure de modèles projective $(\mathbf{W}, \mathbf{Cof}_{\text{proj}}, \mathbf{Fib}_{\text{proj}})$. La classe \mathbf{W} (respectivement $\mathbf{Fib}_{\text{proj}}$) est celle des morphismes $f : F \rightarrow G$ induisant une équivalence faible (respectivement une fibration) $f(Y) : F(Y) \rightarrow G(Y)$ pour tout X -espace analytique lisse Y . La classe $\mathbf{Cof}_{\text{proj}}$ est définie par la propriété de relèvement à gauche par rapport à $\mathbf{W} \cap \mathbf{Fib}_{\text{proj}}$.

Pour un objet A de \mathfrak{M} , on notera A_{cst} le préfaisceau constant sur \mathbf{AnSm}/X ayant A pour valeurs. Étant donné un X -espace analytique lisse Y , on peut former, comme dans [3, Définition 4.4.2], le préfaisceau $Y \otimes A = Y \otimes A_{\text{cst}}$ défini sur \mathbf{AnSm}/X et à valeurs dans \mathfrak{M} . On a la proposition suivante.

Proposition 1.2. La catégorie homotopique $\mathbf{Ho}(\mathbf{PreShv}(\mathbf{AnSm}/X, \mathfrak{M}))$ coïncide avec sa plus petite sous-catégorie triangulée stable par sommes infinies et contenant les objets de la forme $Y \otimes A$ avec Y un X -espace analytique lisse et $A \in \mathcal{E}$.

Démonstration. Les $Y \otimes A$ sont des objets compacts de $\mathbf{Ho}(\mathbf{PreShv}(\mathbf{AnSm}/X, \mathfrak{M}))$. Ceci découle immédiatement du fait que A est compact et que les coproduits préservent les préfaisceaux projectivement fibrants. Par ailleurs, soit $f : F \rightarrow G$ un morphisme de préfaisceaux projectivement fibrants sur \mathbf{AnSm}/X tel que l'homomorphisme

$$\pi_0(Y \otimes A, F) \rightarrow \pi_0(Y \otimes A, G)$$

est bijectif pour tout X -espace analytique lisse Y et $A \in \mathcal{E}$. Par adjonction, on obtient que l'homomorphisme

$$\pi_0(A, F(Y)) \rightarrow \pi_0(A, G(Y))$$

est bijectif. Il vient que f est une équivalence faible de préfaisceaux puisque $\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})$ est compactement engendrée par \mathcal{E} . (Rappelons que nous avons supposé que \mathcal{E} est stable par

suspension et cosuspension à isomorphismes près dans $\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})$.) On a donc montré que la famille des foncteurs

$$\mathrm{hom}_{\mathbf{Ho}(\mathbf{PreShv}(\mathbf{AnSm}/X, \mathfrak{M}))}(Y \otimes A, -) : \mathbf{Ho}(\mathbf{PreShv}(\mathbf{AnSm}/X, \mathfrak{M})) \longrightarrow \mathcal{A}b$$

est conservative. Il résulte de [2, Proposition 2.1.27] que la catégorie triangulée avec sommes infinies $\mathbf{Ho}(\mathbf{PreShv}(\mathbf{AnSm}/X, \mathfrak{M}))$ est compactement engendrée par les $Y \otimes A$. (On utilise ici que la catégorie \mathbf{AnSm}/X est essentiellement petite pour trouver un ensemble de X -espaces analytiques lisses contenant des représentants de toutes les classes d'isomorphisme de \mathbf{AnSm}/X .) D'où le résultat. \square

Remarque 1.3. La preuve de la proposition 1.2 montre plus précisément et d'une façon plus général que la catégorie triangulée avec sommes infinies $\mathbf{Ho}(\mathbf{PreShv}(\mathcal{C}, \mathfrak{M}))$ est compactement engendrée par les objets de la forme $X \otimes A$ avec $X \in \mathbf{Ob}(\mathcal{C})$ et $A \in \mathcal{E}$ et ceci pour toute catégorie essentiellement petite \mathcal{C} . Ce fait nous sera utile dans la suite (notamment dans la preuve de la proposition 1.4).

Par [3, Définition 4.4.33], on peut localiser la structure de modèles ci-dessus pour obtenir la structure projective usu-locale $(\mathbf{W}_{\mathrm{usu}}, \mathbf{Cof}_{\mathrm{proj}}, \mathbf{Fib}_{\mathrm{proj-usu}})$. Rappelons ici la définition de la classe $\mathbf{W}_{\mathrm{usu}}$ dont les éléments sont appelés les équivalences usu-locales. Soit $A \in \mathcal{E}$ et $F \in \mathbf{PreShv}(\mathbf{AnSm}/X, \mathfrak{M})$. On note $\Pi_0(A, F)$ le préfaisceau qui à un X -espace analytique lisse Y associe le groupe abélien $\pi_0(A, F(Y))$ et $\Pi_0^{\mathrm{usu}}(A, F)$ le usu-faisceau associé à $\Pi_0(A, F)$. Un morphisme de préfaisceaux $f : F \rightarrow G$ sur \mathbf{AnSm}/X à valeurs dans \mathfrak{M} est une équivalence usu-locale lorsque le morphisme $\Pi_0^{\mathrm{usu}}(A, f) : \Pi_0^{\mathrm{usu}}(A, F) \rightarrow \Pi_0^{\mathrm{usu}}(A, G)$ est inversible pour tout $A \in \mathcal{E}$.

Dans la suite, on note $\mathbb{D}^1 = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$ qu'on munit de sa structure d'espace analytique complexe évidente. On note aussi $\mathbb{D}^n = (\mathbb{D}^1)^n$ et $\mathbb{D}_X^n = \mathbb{D}^n \times X$ qu'on considère comme un X -espace analytique lisse via la projection sur le second facteur. On a la proposition suivante.

Proposition 1.4. *La catégorie homotopique $\mathbf{Ho}_{\mathrm{usu}}(\mathbf{PreShv}(\mathbf{AnSm}/X, \mathfrak{M}))$ coïncide avec sa plus petite sous-catégorie triangulée stable par sommes infinies et contenant les objets de la forme $\mathbb{D}_U^n \otimes A$ avec U un ouvert de X , $n \in \mathbb{N}$ et $A \in \mathcal{E}$.*

Démonstration. Notons $\mathcal{T} \subset \mathbf{Ho}_{\mathrm{usu}}(\mathbf{PreShv}(\mathbf{AnSm}/X, \mathfrak{M}))$ la plus petite sous-catégorie triangulée, stable par sommes infinies et contenant les $\mathbb{D}_U^n \otimes A$ avec U , n et A comme dans l'énoncé. Par la proposition 1.2, il suffit de montrer que $Y \otimes A \in \mathbf{Ob}(\mathcal{T})$ pour tout X -espace analytique lisse Y . On ne restreint pas la généralité en supposant que Y est partout de dimension relative d . On divise la preuve en deux parties. Dans la première, on établit un résultat technique.

Étape 1. Soit $r : R_\bullet \rightarrow Y$ un hyper-recouvrement (voir par exemple [8]) pour la topologie usuelle avec R_n un coproduit d'ouverts de Y . On dispose d'un foncteur colimite homotopique

$$\mathbf{L}(p_\Delta)_\# : \mathbf{Ho}_{\mathrm{usu}}(\mathbf{PreShv}(\Delta \times \mathbf{AnSm}/X, \mathfrak{M})) \longrightarrow \mathbf{Ho}_{\mathrm{usu}}(\mathbf{PreShv}(\mathbf{AnSm}/X, \mathfrak{M}))$$

adjoint à gauche du foncteur « objet simplicial constant ». L'augmentation r induit un morphisme

$$L(p_{\Delta})_{\#}(R_{\bullet} \otimes A) \longrightarrow Y \otimes A. \quad (1.1)$$

Dans cette étape, on montre que (1.1) est inversible.

Considérons le petit site $(\text{Ouv}(Y), \text{usu})$ des ouverts de Y muni de la topologie usuelle. On dispose d'un pseudo-morphisme de sites (au sens de [3, Définition 4.4.49])

$$q : (\text{AnSm}/X, \text{usu}) \longrightarrow (\text{Ouv}(Y), \text{usu})$$

donné par l'inclusion évidente $\text{Ouv}(Y) \subset \text{AnSm}/X$. Par [3, Théorème 4.4.50], le foncteur image directe q^* admet un foncteur dérivé à gauche

$$Lq^* : \mathbf{Ho}_{\text{usu}}(\mathbf{PreShv}(\text{Ouv}(Y), \mathfrak{M})) \longrightarrow \mathbf{Ho}_{\text{usu}}(\mathbf{PreShv}(\text{AnSm}/X, \mathfrak{M})).$$

De plus, on dispose d'un carré commutatif à un isomorphisme canonique près (comme on voit immédiatement en passant aux adjoints à droite)

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Ho}_{\text{usu}}(\mathbf{PreShv}(\Delta \times \text{Ouv}(Y), \mathfrak{M})) & \xrightarrow{L(p_{\Delta})_{\#}} & \mathbf{Ho}_{\text{usu}}(\mathbf{PreShv}(\text{Ouv}(Y), \mathfrak{M})) \\ \downarrow Lq^* & & \downarrow Lq^* \\ \mathbf{Ho}_{\text{usu}}(\mathbf{PreShv}(\Delta \times \text{AnSm}/X, \mathfrak{M})) & \xrightarrow{L(p_{\Delta})_{\#}} & \mathbf{Ho}_{\text{usu}}(\mathbf{PreShv}(\text{AnSm}/X, \mathfrak{M})). \end{array}$$

Il suffit donc de montrer que (1.1) est inversible en tant que flèche de la catégorie homotopique $\mathbf{Ho}_{\text{usu}}(\mathbf{PreShv}(\text{Ouv}(Y), \mathfrak{M}))$.

Pour $y \in Y$, on note $\mathcal{V}(y)$ le système cofiltrant des voisinages ouverts de y dans Y . Le foncteur

$$y^* : \mathbf{PreShv}(\text{Ouv}(Y), \mathfrak{M}) \longrightarrow \mathfrak{M}$$

qui à un préfaisceau F associe $y^*(F) = \text{Colim}_{V \in \mathcal{V}(y)} F(V)$ envoie les équivalences usuelles locales sur des équivalences faibles. Il induit donc un foncteur

$$y^* : \mathbf{Ho}_{\text{usu}}(\mathbf{PreShv}(\text{Ouv}(Y), \mathfrak{M})) \longrightarrow \mathbf{Ho}(\mathfrak{M}). \quad (1.2)$$

Lorsque y parcourt Y , les foncteurs (1.2) forment une famille conservative. Il suffit donc de montrer que

$$y^*L(p_{\Delta})_{\#}(R_{\bullet} \otimes A) = L(p_{\Delta})_{\#}(y^*(R_{\bullet}) \otimes A) \longrightarrow A \quad (1.3)$$

est inversible pour tout $y \in Y$. Or, le morphisme $y^*(R_{\bullet}) \longrightarrow \star$ (avec \star un objet final de la catégorie des ensembles) est une équivalence d'homotopie puisque R_{\bullet} est un hyper-recouvrement de Y . D'où le résultat recherché.

Étape 2. Comme Y est lisse, on peut trouver un hyper-recouvrement $R_{\bullet} \longrightarrow Y$ avec R_n un coproduit d'ouverts de Y isomorphes à \mathbb{D}_U^d avec U des ouverts de X . Par l'étape

précédente, il suffit de montrer que $L(p_{\Delta})_{\#}(R_{\bullet} \otimes A)$ est dans \mathcal{T} . Considérons le foncteur composé

$$\begin{array}{ccc} \theta : \mathbf{Ho}(\mathbf{PreShv}(\Delta \times \mathbf{AnSm}/X, \mathfrak{M})) & \longrightarrow & \mathbf{Ho}_{\text{usu}}(\mathbf{PreShv}(\Delta \times \mathbf{AnSm}/X, \mathfrak{M})) \\ & & \downarrow L(p_{\Delta})_{\#} \\ & & \mathbf{Ho}_{\text{usu}}(\mathbf{PreShv}(\mathbf{AnSm}/X, \mathfrak{M})). \end{array}$$

Il s'agit de montrer que l'image de $R_{\bullet} \otimes A$ par θ est dans \mathcal{T} . Étant donné que $\theta((\underline{n}, \mathbb{D}_U^d) \otimes A) = \mathbb{D}_U^d \otimes A$ pour tout $\underline{n} \in \Delta$ et que θ commute aux sommes infinies, il suffit de montrer que $R_{\bullet} \otimes A$ est dans la sous-catégorie triangulée avec sommes infinies $\mathcal{T}' \subset \mathbf{Ho}(\mathbf{PreShv}(\Delta \times \mathbf{AnSm}/X, \mathfrak{M}))$ compactement engendrée par les objets de la forme $(\underline{n}, \mathbb{D}_U^d) \otimes A$.

Notons \mathcal{C} la sous-catégorie pleine de \mathbf{AnSm}/X dont les objets sont les X -espaces analytiques lisses isomorphes à \mathbb{D}_U^d avec U un ouvert de X . On dispose d'un foncteur triangulé évident

$$\mathbf{Ho}(\mathbf{PreShv}(\Delta \times \mathcal{C}, \mathfrak{M})) \longrightarrow \mathbf{Ho}(\mathbf{PreShv}(\Delta \times \mathbf{AnSm}/X, \mathfrak{M}))$$

qui est l'identité sur les objets de la forme $(\underline{n}, \mathbb{D}_U^d) \otimes A$. Il est clair que notre objet $R_{\bullet} \otimes A$ est dans l'image de ce foncteur. Or, $\mathbf{Ho}(\mathbf{PreShv}(\Delta \times \mathcal{C}, \mathfrak{M}))$ est compactement engendrée par les objets $(\underline{n} \times \mathbb{D}_U^d) \otimes A$. La proposition est démontrée. \square

Considérons maintenant la localisation de Bousfield de la structure projective usu-locale par rapport à la classe des flèches $\mathbb{D}_Y^1 \otimes A \rightarrow Y \otimes A$ avec Y un X -espace analytique lisse et $A \in \mathcal{E}$. On obtient ainsi la structure projective $(\mathbb{D}^1, \text{usu})$ -locale $(\mathbf{W}_{\mathbb{D}^1\text{-usu}}, \mathbf{Cof}_{\text{proj}}, \mathbf{Fib}_{\mathbb{D}^1\text{-usu-proj}})$ et on notera $\mathbf{Ho}_{\mathbb{D}^1\text{-usu}}(\mathbf{PreShv}(\mathbf{AnSm}/X, \mathfrak{M}))$ sa catégorie homotopique.

Comme dans [3, Lemme 4.5.13], un objet projectivement usu-fibrant F de la catégorie $\mathbf{PreShv}(\mathbf{AnSm}/X, \mathfrak{M})$ est \mathbb{D}^1 -local si et seulement si le morphisme $F \rightarrow \underline{\text{hom}}(\mathbb{D}_X^1, F)$, induit par la projection structurale de \mathbb{D}_X^1 sur X , est une équivalence usu-locale. Rappelons (voir [3, § 4.4.1]) que pour un X -espace analytique Y , le préfaisceau $\underline{\text{hom}}(Y, F)$ est donné par l'association $\dagger \rightsquigarrow F(Y \times_X \dagger)$.

Proposition 1.5. *La catégorie homotopique $\mathbf{Ho}_{\mathbb{D}^1\text{-usu}}(\mathbf{PreShv}(\mathbf{AnSm}/X, \mathfrak{M}))$ coïncide avec sa plus petite sous-catégorie triangulée stable par sommes infinies et contenant les objets de la forme $U \otimes A$ avec U un ouvert de X et $A \in \mathcal{E}$.*

Démonstration. L'énoncé découle immédiatement de la proposition 1.4 et du fait que les objets $\mathbb{D}_U^n \otimes A$ sont isomorphes à $U \otimes A$ dans $\mathbf{Ho}_{\mathbb{D}^1\text{-usu}}(\mathbf{PreShv}(\mathbf{AnSm}/X, \mathfrak{M}))$. \square

Rappelons qu'on avait noté $\text{Ouv}(X)$ l'ensemble des ouverts de X ordonné par l'inclusion. On appellera $\iota_X : \text{Ouv}(X) \subset \mathbf{AnSm}/X$ l'inclusion évidente qui fournit un couple de foncteurs adjoints

$$(\iota_X^*, \iota_{X*}) : \mathbf{PreShv}(\text{Ouv}(X), \mathfrak{M}) \longrightarrow \mathbf{PreShv}(\mathbf{AnSm}/X, \mathfrak{M}).$$

On vérifie immédiatement que ι_X est un morphisme de sites pour les topologies usuelles. Il vient que le foncteur ι_X^* préserve les équivalences usu-locales. Il se dérive donc trivialement pour donner un foncteur

$$\iota_X^* : \mathbf{D}_{\mathfrak{M}}(X) = \mathbf{Ho}_{\text{usu}}(\mathbf{PreShv}(\text{Ouv}(X), \mathfrak{M})) \longrightarrow \mathbf{Ho}_{\text{usu}}(\mathbf{PreShv}(\text{AnSm}/X, \mathfrak{M})) . \quad (1.4)$$

On a le résultat clef suivant.

Proposition 1.6. *Le foncteur (1.4) prend ses valeurs dans la sous-catégorie des objets \mathbb{D}^1 -locaux.*

Démonstration. Soit K un préfaisceau sur $\text{Ouv}(X)$ à valeurs dans \mathfrak{M} . On cherche à montrer que $\iota_X^*(K)$ est \mathbb{D}^1 -local en tant qu'objet de $\mathbf{Ho}_{\text{usu}}(\mathbf{PreShv}(\text{AnSm}/X, \mathfrak{M}))$. On fixe une cofibration projective usu-triviale $\iota_X^*(K) \rightarrow L$ avec L un préfaisceau projectivement usu-fibrant. Ceci nous ramène à prouver que $L \rightarrow \underline{\text{hom}}(\mathbb{D}_X^1, L)$ est une équivalence usu-locale. On divisera la preuve de cela en trois étapes. La première étape servira essentiellement à introduire quelques notations.

Étape A. On dispose d'un foncteur $\text{o}_X : \text{AnSm}/X \rightarrow \text{Ouv}(X)$ qui à un X -espace analytique lisse Y associe l'ouvert $\text{o}_X(Y)$ image du morphisme structural $Y \rightarrow X$. Il est facile de voir que o_X est un adjoint à gauche de ι_X . Il induit de plus un couple de foncteurs adjoints sur les catégories de préfaisceaux

$$(\text{o}_X^*, \text{o}_{X*}) : \mathbf{PreShv}(\text{AnSm}/X, \mathfrak{M}) \longrightarrow \mathbf{PreShv}(\text{Ouv}(X), \mathfrak{M}) .$$

L'association $\dagger \rightsquigarrow \dagger_*$ qui à un foncteur \dagger associe le foncteur « préfaisceau image directe » suivant \dagger est covariante et monoïdale (pour la composition des foncteurs). Il vient que l'adjonction (o_X, ι_X) induit une adjonction $(\text{o}_{X*}, \iota_{X*})$. En passant aux adjoints à gauche, on déduit un deuxième couple de foncteurs adjoints $(\text{o}_X^*, \iota_X^*)$. Il vient que les foncteurs ι_X^* et o_{X*} sont canoniquement isomorphes. On a donc $\iota_X^*(K)(Y) \simeq K(\text{o}_X(Y))$ pour tout X -espace analytique lisse.

Dans la suite, étant donné un préfaisceau F sur AnSm/X et un pro-objet $(V_i)_{i \in \mathcal{I}}$ de AnSm/X , on posera

$$F((V_i)_{i \in \mathcal{I}}) = \text{Colim}_{i \in \mathcal{I}} F(V_i) \quad \text{et} \quad \underline{\text{hom}}((V_i)_{i \in \mathcal{I}}, F) = \text{Colim}_{i \in \mathcal{I}} \underline{\text{hom}}(V_i, F) .$$

Les exemples typiques de tels pro-objets sont les systèmes cofiltrants des voisinages ouverts d'une partie P dans un X -espace analytique Y . Ces pro-objets seront notés $\mathcal{V}_Y(P)$.

Étape B. On note \mathbb{U} le système cofiltrant des voisinages ouverts du segment $[0, 1] \subset \mathbb{C}$ qu'on considérera comme un pro-objet de variétés complexes. Plus généralement, pour des réels $a \leq b$, on note $\mathbb{U}[a, b]$ le système cofiltrant des voisinages ouverts du segment $[a, b] \subset \mathbb{C}$. On pose $\mathbb{U}_X = \mathbb{U} \times X$ et $\mathbb{U}_X[a, b] = \mathbb{U}[a, b] \times X$.

Dans cette étape, nous montrerons que

$$L \longrightarrow \underline{\text{hom}}(\mathbb{U}_X, L) \quad (1.5)$$

est une équivalence usu-locale. Par la preuve de [3, Proposition 4.4.62], il suffit de vérifier que les fibres de (1.5) sont des équivalences faibles pour une famille conservative de points du topos $\mathbf{Shv}_{\text{usu}}(\mathbf{AnSm}/X)$. Or, une telle famille de points est donnée par les foncteurs

$$F \in \mathbf{Shv}_{\text{usu}}(\mathbf{AnSm}/X) \rightsquigarrow \text{Colim}_{V \in \mathcal{V}_Y(y)} F(V) = F(\mathcal{V}_Y(y))$$

pour Y un X -espace analytique lisse et $y \in Y$. Ceci nous ramène à prouver que

$$L(\mathcal{V}_Y(y)) \longrightarrow L(\mathbb{U} \times \mathcal{V}_Y(y))$$

est une équivalence faible de \mathfrak{M} pour tout X -espace analytique lisse Y et tout point y de Y . Comme \mathcal{E} est un ensemble de générateurs compacts de $\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})$, il suffit de montrer l'application

$$\Pi_0(A, L)(\mathcal{V}_Y(y)) \longrightarrow \Pi_0(A, L)(\mathbb{U} \times \mathcal{V}_Y(y)) \quad (1.6)$$

est bijective pour tout $A \in \mathcal{E}$. L'injectivité étant claire, on se concentre sur la surjectivité.

Soit $\alpha \in \Pi_0(A, L)(\mathbb{U} \times \mathcal{V}_Y(y))$. Alors α est la classe d'un élément $\alpha_0 \in \Pi_0(A, L)(U \times V)$ avec U et V des voisinages ouverts de $[0, 1] \subset \mathbb{C}$ et $y \in Y$ respectivement. Étant donné que $\iota_X^* K \rightarrow L$ est une équivalence usu-locale, pour tout point $r \in [0, 1]$ on peut trouver des voisinages ouverts $U(r) \subset U$ et $V(r) \subset V$ de $r \in \mathbb{C}$ et $y \in Y$, ainsi qu'un élément $\beta_0(r) \in \Pi_0(A, \iota_X^*(K))(U(r) \times V(r))$ dont l'image dans $\Pi_0(A, L)(U(r) \times V(r))$ coïncide avec $(\alpha_0)_{|U(r) \times V(r)}$. On note $\beta(r)$ l'image de $\beta_0(r)$ dans $\Pi_0(A, \iota_X^*(K))(U(r) \times \mathcal{V}_Y(y))$. Remarquons par ailleurs que

$$\iota_X^*(K)(U(r) \times \mathcal{V}_Y(y)) = \circ_{X*}(K)(U(r) \times \mathcal{V}_Y(y)) = K(\mathcal{V}_X(x))$$

avec $x \in X$ l'image de y par la projection structurale. Il vient que $\beta(r)$ est l'image d'un élément de $\Pi_0(A, K)(\mathcal{V}_X(x))$. Étant donné que $[0, 1]$ est compact, on peut donc trouver un entier $N \in \mathbb{N}$ et des éléments $\beta_i \in \Pi_0(A, K)(\mathcal{V}_X(x))$ pour $i \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$ tels que la condition suivante est satisfaite. L'image de β_i par la composition

$$\begin{aligned} \Pi_0(A, K)(\mathcal{V}_X(x)) &\longrightarrow \Pi_0(A, \iota_X^*(K))\left(\mathbb{U}\left[\frac{i}{N}, \frac{i+1}{N}\right] \times \mathcal{V}_Y(y)\right) \\ &\longrightarrow \Pi_0(A, L)\left(\mathbb{U}\left[\frac{i}{N}, \frac{i+1}{N}\right] \times \mathcal{V}_Y(y)\right) \end{aligned}$$

coïncide avec $\alpha_{|\mathbb{U}[i/N, (i+1)/N] \times \mathcal{V}_Y(y)}$.

Soit $i \in \llbracket 0, N-2 \rrbracket$ et montrons que $\beta_i = \beta_{i+1}$. Remarquons pour cela que les images de β_i et β_{i+1} dans

$$\Pi_0(A, L)\left(\mathbb{U}\left[\frac{i+1}{N}, \frac{i+1}{N}\right] \times \mathcal{V}_Y(y)\right)$$

sont toutes les deux égales à $\alpha_{|\mathbb{U}[(i+1)/N, (i+1)/N] \times \mathcal{V}_Y(y)}$. Il suffit donc de voir que le morphisme

$$\Pi_0(A, K)(\mathcal{V}_X(x)) \longrightarrow \Pi_0(A, L)\left(\mathbb{U}\left[\frac{i+1}{N}, \frac{i+1}{N}\right] \times \mathcal{V}_Y(y)\right)$$

est injectif. Pour cela, on utilise le carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} \Pi_0(A, K)(\mathcal{V}_X(x)) & \longrightarrow & \Pi_0(A, L)\left(\mathbb{U}\left[\frac{i+1}{N}, \frac{i+1}{N}\right] \times \mathcal{V}_Y(y)\right) \\ \downarrow (1) \sim & & \downarrow \\ \Pi_0(A, \iota_X^*(K))(\mathcal{V}_Y(y)) & \xrightarrow{\sim (2)} & \Pi_0(A, L)\left(\left\{\frac{i+1}{N}\right\} \times \mathcal{V}_Y(y)\right) \end{array}$$

On a déjà remarqué que (1) est bijective. L'application (2) est bijective du fait que $\iota_*(K) \rightarrow L$ est une équivalence usu-locale. Dans la suite, on notera β la valeur commune de tous les β_i .

Pour terminer cette étape, on montrera par induction sur $i \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$ que l'image de β dans

$$\Pi_0(A, L)\left(\mathbb{U}\left[0, \frac{i}{N}\right] \times \mathcal{V}_Y(y)\right)$$

coïncide $\alpha|_{\mathbb{U}[0, i/N] \times \mathcal{V}_Y(y)}$. Le cas $i = N-1$ de cette induction entraîne en effet que α est dans l'image de (1.6).

Comme L est usu-fibrant, le lemme 1.7 ci-dessous fournit une suite exacte longue de groupes abéliens

$$\begin{aligned} & \rightarrow \Pi_1(A, L)\left(\mathbb{U}\left[0, \frac{i}{N}\right] \times \mathcal{V}_Y(y)\right) \oplus \Pi_1(A, L)\left(\mathbb{U}\left[\frac{i}{N}, \frac{i+1}{N}\right] \times \mathcal{V}_Y(y)\right) \\ & \xrightarrow{(a)} \Pi_1(A, L)\left(\mathbb{U}\left[\frac{i}{N}, \frac{i}{N}\right] \times \mathcal{V}_Y(y)\right) \xrightarrow{(b)} \Pi_0(A, L)\left(\mathbb{U}\left[0, \frac{i+1}{N}\right] \times \mathcal{V}_Y(y)\right) \\ & \xrightarrow{(c)} \Pi_0(A, L)\left(\mathbb{U}\left[0, \frac{i}{N}\right] \times \mathcal{V}_Y(y)\right) \oplus \Pi_0(A, L)\left(\mathbb{U}\left[\frac{i}{N}, \frac{i+1}{N}\right] \times \mathcal{V}_Y(y)\right) \rightarrow \end{aligned}$$

(Ci-dessus, nous avons noté $\Pi_1(A, -)$ pour désigner $\Pi_0(\Sigma^1(A), -)$ où Σ^1 est le foncteur de suspension.) Nous affirmons que (c) est injective. Pour cela, il suffit de montrer que (b) est le morphisme nul ou encore que (a) est surjective. Du fait que $\iota_X^*(K) \rightarrow L$ est une équivalence usu-locale, on déduit des isomorphismes

$$\begin{aligned} \Pi_1(A, K)(\mathcal{V}_X(x)) & \simeq \Pi_1(A, \iota_X^*(K))\left(\mathbb{U}\left[\frac{i}{N}, \frac{i}{N}\right] \times \mathcal{V}_Y(y)\right) \\ & \simeq \Pi_1(A, L)\left(\mathbb{U}\left[\frac{i}{N}, \frac{i}{N}\right] \times \mathcal{V}_Y(y)\right). \end{aligned}$$

Clairement, cela entraîne que l'application

$$\Pi_1(A, L)\left(\mathbb{U}\left[\frac{i}{N}, \frac{i+1}{N}\right] \times \mathcal{V}_Y(y)\right) \longrightarrow \Pi_1(A, L)\left(\mathbb{U}\left[\frac{i}{N}, \frac{i}{N}\right] \times \mathcal{V}_Y(y)\right)$$

est surjective et donc l'application (a) est également surjective. Le résultat recherché découle maintenant du fait que $\alpha_{|\mathbb{U}[0, (i+1)/N] \times \mathcal{V}_Y(y)}$ ainsi que l'image de β dans

$$\Pi_0(A, L) \left(\mathbb{U} \left[0, \frac{i+1}{N} \right] \times \mathcal{V}_Y(y) \right)$$

ont les mêmes images dans

$$\Pi_0(A, L) \left(\mathbb{U} \left[0, \frac{i}{N} \right] \times \mathcal{V}_Y(y) \right) \quad \text{et} \quad \Pi_0(A, L) \left(\mathbb{U} \left[\frac{i}{N}, \frac{i+1}{N} \right] \times \mathcal{V}_Y(y) \right).$$

Étape C. Dans cette étape on termine la preuve de la proposition. On note $\bar{\mathbb{D}}^1$ le système cofiltrant des voisinages du disque unité $\{z \in \mathbb{C}; |z| \leq 1\} \subset \mathbb{C}$. On dispose d'une action par homothétie

$$h : \mathbb{U} \times \bar{\mathbb{D}}^1 \longrightarrow \bar{\mathbb{D}}^1,$$

qui sur les points correspond à la multiplication d'un élément de $[0, 1]$ par un élément de $\{z \in \mathbb{C}; |z| \leq 1\}$. Il s'agit bien d'un morphisme de pro-objets dans la catégorie des variétés complexes.

Montrons d'abord que $L \longrightarrow \underline{\mathrm{hom}}(\bar{\mathbb{D}}_X^1, L)$ est une équivalence usu-locale. La section nulle de $\bar{\mathbb{D}}^1$ induit une rétraction $\underline{\mathrm{hom}}(\bar{\mathbb{D}}_X^1, L) \longrightarrow L$. On montrera que dans $\mathbf{Ho}_{\mathrm{usu}}(\mathbf{PreShv}(\mathbf{AnSm}/X, \mathfrak{M}))$ la composition de

$$\underline{\mathrm{hom}}(\bar{\mathbb{D}}_X^1, L) \longrightarrow L \longrightarrow \underline{\mathrm{hom}}(\bar{\mathbb{D}}_X^1, L)$$

est égale à l'identité. Pour cela, on utilise le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} & & \underline{\mathrm{hom}}(\bar{\mathbb{D}}_X^1, L) \\ & \nearrow s_1^* & \\ \underline{\mathrm{hom}}(\bar{\mathbb{D}}_X^1, L) & \xrightarrow{h^*} & \underline{\mathrm{hom}}(\mathbb{U} \times \bar{\mathbb{D}}_X^1, L) \\ \downarrow & & \searrow s_0^* \\ L & \xrightarrow{\quad} & \underline{\mathrm{hom}}(\bar{\mathbb{D}}_X^1, L) \end{array}$$

avec s_0 et s_1 les sections nulles et unités de \mathbb{U} . Il suffira donc de montrer que h^* est inversible, ou ce qui revient au même que s_0^* est inversible. Mais s_0^* s'obtient en appliquant $\underline{\mathrm{hom}}(\bar{\mathbb{D}}_X^1, -)$ à $s_0^* : \underline{\mathrm{hom}}(\mathbb{U}_X, L) \longrightarrow L$. Or, d'après l'étape précédente, le morphisme s_0^* est une équivalence usu-locale entre objets projectivement usu-fibrants. D'où le résultat recherché.

Il est maintenant aisé de conclure. Comme L est usu-fibrant, on a

$$\underline{\mathrm{hom}}(\bar{\mathbb{D}}_X^1, L) \simeq \mathrm{HoLim}_{n \in \mathbb{N}} \underline{\mathrm{hom}} \left(\bar{\mathbb{D}}_X^1 \left(o, 1 - \frac{1}{n} \right), L \right).$$

Or, on dispose de morphismes de \mathbb{N} -systèmes projectifs

$$\begin{array}{ccccccc}
 \cdots \rightarrow \underline{\mathrm{hom}}\left(\mathbb{D}_X^1\left(o, 1 - \frac{1}{n+1}\right), L\right) & \longrightarrow & \underline{\mathrm{hom}}\left(\mathbb{D}_X^1\left(o, 1 - \frac{1}{n}\right), L\right) & \longrightarrow & \underline{\mathrm{hom}}\left(\mathbb{D}_X^1\left(o, 1 - \frac{1}{n-1}\right), L\right) & \longrightarrow & \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 \cdots \rightarrow \underline{\mathrm{hom}}\left(\mathbb{D}_X^1\left(o, 1 - \frac{1}{n+1}\right), L\right) & \longrightarrow & \underline{\mathrm{hom}}\left(\mathbb{D}_X^1\left(o, 1 - \frac{1}{n}\right), L\right) & \longrightarrow & \underline{\mathrm{hom}}\left(\mathbb{D}_X^1\left(o, 1 - \frac{1}{n-1}\right), L\right) & \longrightarrow & \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 \cdots \rightarrow \underline{\mathrm{hom}}\left(\mathbb{D}_X^1\left(o, 1 - \frac{1}{n}\right), L\right) & \longrightarrow & \underline{\mathrm{hom}}\left(\mathbb{D}_X^1\left(o, 1 - \frac{1}{n-1}\right), L\right) & \longrightarrow & \underline{\mathrm{hom}}\left(\mathbb{D}_X^1\left(o, 1 - \frac{1}{n-2}\right), L\right) & \longrightarrow & \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 \cdots \rightarrow \underline{\mathrm{hom}}\left(\mathbb{D}_X^1\left(o, 1 - \frac{1}{n}\right), L\right) & \longrightarrow & \underline{\mathrm{hom}}\left(\mathbb{D}_X^1\left(o, 1 - \frac{1}{n-1}\right), L\right) & \longrightarrow & \underline{\mathrm{hom}}\left(\mathbb{D}_X^1\left(o, 1 - \frac{1}{n-2}\right), L\right) & \longrightarrow &
 \end{array}$$

On déduit immédiatement que

$$L \simeq \mathrm{HoLim}_{n \in \mathbb{N}} \underline{\mathrm{hom}}\left(\mathbb{D}^1\left(o, 1 - \frac{1}{n}\right), L\right) \simeq \mathrm{HoLim}_{n \in \mathbb{N}} \underline{\mathrm{hom}}\left(\mathbb{D}^1\left(o, 1 - \frac{1}{n}\right), L\right).$$

Ceci achève la preuve de la proposition. \square

Lemme 1.7. Soient X un espace analytique complexe et $F \in \mathbf{PreShv}(\mathbf{AnSm}/X, \mathfrak{M})$ un préfaisceau projectivement usu-fibrant. Soient Y un X -espace analytique lisse et U et V des ouverts de Y tels que $Y = U \cup V$. Alors le carré

$$\begin{array}{ccc}
 F(Y) & \longrightarrow & F(U) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 F(V) & \longrightarrow & F(U \cap V)
 \end{array}$$

est homotopiquement cartésien et cocartésien.

Démonstration. Rappelons que dans une catégorie de modèles stable, un carré est homotopiquement cartésien si et seulement si il est homotopiquement cocartésien. On montrera donc uniquement que le carré de l'énoncé est homotopiquement cartésien.

La preuve de cela est calquée sur la première partie de la preuve de [4, Corollaire 1.2.32]. Nous aurons besoin d'utiliser la structure injective usu-locale sur la catégorie $\mathbf{PreShv}(\mathbf{AnSm}/X, \mathfrak{M})$ obtenue en localisant la structure injective par les équivalences usu-locales (voir [3, Définition 4.4.33]). Avec les notations de [3, Définition 4.4.2], si $G \in \mathbf{PreShv}(\mathbf{AnSm}/X, \mathfrak{M})$ est injectivement usu-fibrant et si $u : E \rightarrow E'$ est un monomorphisme de préfaisceaux d'ensembles sur \mathbf{AnSm}/X , $\underline{\mathrm{hom}}_{\mathfrak{M}}(u, G) : \underline{\mathrm{hom}}_{\mathfrak{M}}(E', G) \rightarrow \underline{\mathrm{hom}}_{\mathfrak{M}}(E, G)$ est une fibration entre objets fibrants de \mathfrak{M} (voir [3, Proposition 4.4.35]). Si de plus, u induit un isomorphisme sur les usu-faisceaux associés, $\underline{\mathrm{hom}}_{\mathfrak{M}}(u, G)$ est

une équivalence faible (et donc une fibration triviale). En effet, pour tout A dans \mathcal{E} , l'application

$$\mathrm{hom}_{\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})}(A, \underline{\mathrm{hom}}_{\mathfrak{M}}(E', G)) \longrightarrow \mathrm{hom}_{\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})}(A, \underline{\mathrm{hom}}_{\mathfrak{M}}(E, G))$$

s'identifie via les adjonctions $(E \otimes (-)_{\mathrm{cst}}, \underline{\mathrm{hom}}_{\mathfrak{M}}(E, -))$ et $(E' \otimes (-)_{\mathrm{cst}}, \underline{\mathrm{hom}}_{\mathfrak{M}}(E', -))$ à

$$\begin{aligned} \mathrm{hom}_{\mathbf{Ho}_{\mathrm{usu}}(\mathbf{PreShv}(\mathbf{AnSm}/X, \mathfrak{M}))}(E' \otimes A_{\mathrm{cst}}, G) \\ \longrightarrow \mathrm{hom}_{\mathbf{Ho}_{\mathrm{usu}}(\mathbf{PreShv}(\mathbf{AnSm}/X, \mathfrak{M}))}(E \otimes A_{\mathrm{cst}}, G). \end{aligned}$$

On utilise alors [3, Proposition 4.4.39] pour conclure.

Revenons à la preuve du lemme. Étant donné que la propriété d'être homotopiquement cartésien est stable par équivalences faibles de préfaisceaux, on peut supposer que F est injectivement usu-fibrant. On a un carré cartésien de X -espaces analytiques lisses

$$\begin{array}{ccc} U \cap V & \xrightarrow{a'} & V \\ \downarrow & & \downarrow \\ U & \xrightarrow{a} & Y. \end{array}$$

Comme a et a' sont des monomorphismes, on déduit que $F(a)$ et $F(a')$ sont des fibrations entre objets fibrants de \mathfrak{M} . Pour montrer que le carré de l'énoncé est homotopiquement cartésien, il suffit donc de montrer que le morphisme induit sur les fibres $\mathrm{Fib}(F(a)) \rightarrow \mathrm{Fib}(F(a'))$ est une équivalence faible. Pour cela, on considère le carré cocartésien de préfaisceaux d'ensembles

$$\begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ * & \longrightarrow & Y/U. \end{array}$$

Le foncteur $\mathrm{hom}_{\mathfrak{M}}(-, F)$ envoie une colimite de préfaisceaux d'ensembles sur une limite de \mathfrak{M} . On déduit alors un carré cartésien dans \mathfrak{M}

$$\begin{array}{ccc} F(Y/U) & \longrightarrow & F(Y) \\ \downarrow & & \downarrow \\ F(*) & \longrightarrow & F(U) \end{array}$$

à flèches verticales des fibrations. On déduit alors une équivalence faible

$$\mathrm{Fib}(F(Y/U) \rightarrow F(*)) \longrightarrow \mathrm{Fib}(F(Y) \rightarrow F(U)).$$

Le même argument fournit une équivalence faible

$$\mathrm{Fib}(F(V/U \cap V) \rightarrow F(*)) \longrightarrow \mathrm{Fib}(F(V) \rightarrow F(U \cap V)).$$

On est donc ramené en fin de compte à montrer que $F(Y/U) \rightarrow F(V/U \cap V)$ est une équivalence faible. Ceci découle du fait que $V/U \cap V \rightarrow Y/U$ induit un isomorphisme sur les usu-faisceaux associés. \square

Considérons maintenant le foncteur

$$\iota_X^* : \mathbf{D}_{\mathfrak{M}}(X) = \mathbf{Ho}_{\text{usu}}(\mathbf{PreShv}(\text{Ouv}(X), \mathfrak{M})) \longrightarrow \mathbf{Ho}_{\mathbb{D}^1\text{-usu}}(\mathbf{PreShv}(\text{AnSm}/X, \mathfrak{M})) \quad (1.7)$$

obtenu de (1.4) en composant avec le foncteur de localisation par les \mathbb{D}^1 -équivalences faibles. Le résultat ci-dessous est le point clef de cette sous-section. Il s'agit d'une variante analytique et relative (i.e., au dessus d'une base) de [13, Théorème 5.12] avec $\Delta^{\text{op}}\mathcal{E}ns$ remplacée par \mathfrak{M} .

Théorème 1.8. *L'adjonction (ι_X^*, ι_{X*}) est une équivalence de Quillen lorsqu'on munit $\mathbf{PreShv}(\text{Ouv}(X), \mathfrak{M})$ de sa structure projective locale et $\mathbf{PreShv}(\text{AnSm}/X, \mathfrak{M})$ de sa structure projective $(\mathbb{D}^1, \text{usu})$ -locale. En d'autres termes, (1.7) est une équivalence de catégories.*

Démonstration. Le foncteur ι_X^* commute aux sommes infinies. Par la proposition 1.5, il suffit donc de montrer que (1.7) est pleinement fidèle. On montrera pour cela que le morphisme d'unité $\text{id} \longrightarrow R\iota_{X*} \circ \iota_X^*$ est inversible.

Rappelons que dans la première étape de la preuve de la proposition 1.6 nous avons introduit le foncteur $\circ_X : \text{AnSm}/X \longrightarrow \text{Ouv}(X)$ qui à un X -espace analytique lisse Y associe l'ouvert $\circ_X(Y)$, image du morphisme structural $Y \longrightarrow X$. C'est un adjoint à gauche de ι_X . Nous avons également montré que les foncteurs ι_X^* et \circ_{X*} sont canoniquement isomorphes. En particulier, \circ_{X*} préserve les équivalences usu-locales et se dérive trivialement. Le morphisme d'unité $\text{id} \longrightarrow R\iota_{X*} \circ \iota_X^*$ s'identifie alors à la transformation naturelle $\text{id}_* \longrightarrow R\iota_{X*} \circ \circ_{X*}$ déduite par naturalité de la counité de l'adjonction (\circ_X, ι_X) . Plus précisément, au niveau des catégories de modèles, cette transformation naturelle est la composition de

$$\text{id}_* \xrightarrow{(a)} \iota_{X*} \circ \circ_{X*} \xrightarrow{(b)} \iota_{X*} Q_{\mathbb{D}^1\text{-usu}} \circ \circ_{X*}$$

où $\text{id} \longrightarrow Q_{\mathbb{D}^1\text{-usu}}$ est un foncteur de remplacement $(\mathbb{D}^1, \text{usu})$ -fibrant. La transformation naturelle (a) est inversible étant donné que la counité $\circ_X \circ \iota_X \longrightarrow \text{id}$ est inversible. Par ailleurs, nous avons montré dans la proposition 1.6 que le foncteur $\circ_{X*} = \iota_{X*}^*$ envoie un objet de $\mathbf{PreShv}(\text{Ouv}(X), \mathfrak{M})$ sur un objet \mathbb{D}^1 -local de $\mathbf{PreShv}(\text{AnSm}/X, \mathfrak{M})$ relativement à la structure usu-locale. En d'autres termes, $\circ_{X*}(K) \longrightarrow Q_{\mathbb{D}^1\text{-usu}} \circ_{X*}(K)$ est une équivalence usu-locale pour tout objet K de $\mathbf{PreShv}(\text{Ouv}(X), \mathfrak{M})$. Comme ι_{X*} préserve les équivalences usu-locales, on obtient que (b) appliquée à $K \in \mathbf{PreShv}(\text{Ouv}(X), \mathfrak{M})$ est une équivalence usu-locale. Ceci montre que le morphisme d'unité $\text{id} \longrightarrow R\iota_{X*} \circ \iota_X^*$ est inversible et achève la preuve du théorème. \square

Remarque 1.9. Lorsque $X = pt$ est l'espace analytique réduit à un point, le théorème 1.8 fournit une équivalence de catégories

$$\mathbf{Ho}_{\mathbb{D}^1\text{-usu}}(\mathbf{PreShv}(\text{AnSm}/pt, \mathfrak{M})) \simeq \mathbf{Ho}(\mathfrak{M}). \quad (1.8)$$

Si Y est une variété analytique complexe et $R_\bullet \longrightarrow Y$ est un hyper-recouvrement de Y par des ouverts isomorphes à des polydisques unités \mathbb{D}^d , l'objet $Y \otimes A$ correspond, via l'équivalence (1.8), à la colimite homotopique de l'objet simplicial $\pi_0(R_\bullet) \otimes A$ avec

$\pi_0(R_n)$ l'ensemble des composantes connexes de R_n . Ceci découle immédiatement de la preuve de la proposition 1.4.

La dernière étape de la construction concerne la stabilisation. On utilisera pour cela le lemme ci-dessous qui découle de la remarque 1.9.

Lemme 1.10. *Soit $A \in \mathfrak{M}$. Il existe un isomorphisme*

$$\mathrm{Cof}(\mathbb{G}\mathrm{m}_X^{\mathrm{an}} \otimes A \rightarrow \mathbb{A}_X^{1,\mathrm{an}} \otimes A) \simeq (\mathrm{id}_X) \otimes A[+2]$$

dans la catégorie triangulée $\mathbf{Ho}_{\mathbb{D}^1\text{-usu}}(\mathbf{PreShv}(\mathbf{AnSm}/X, \mathfrak{M}))$.

À partir de maintenant, on supposera que \mathfrak{M} est une catégorie de modèles monoïdale et symétrique (voir [3, Définition 4.1.57]). On supposera également que \mathcal{E} contient un objet unité $\mathbb{1}$ de \mathfrak{M} . On notera T_X un remplacement projectivement cofibrant du préfaisceau

$$\frac{\mathbb{A}_X^{1,\mathrm{an}} \otimes \mathbb{1}}{\mathbb{G}\mathrm{m}_X^{\mathrm{an}} \otimes \mathbb{1}}.$$

On notera $\mathbf{Spect}_{T_X}^\Sigma(\mathbf{PreShv}(\mathbf{AnSm}/X, \mathfrak{M}))$ la catégorie des T_X -spectres symétriques de préfaisceaux sur \mathbf{AnSm}/X à valeurs dans \mathfrak{M} . On peut munir cette catégorie de la structure projective déduite de l'une des structures projectives sur $\mathbf{PreShv}(\mathbf{AnSm}/X, \mathfrak{M})$ considérées plus haut. Les structures de modèles ainsi obtenues seront notées respectivement

$$(\mathbf{W}_{\mathrm{st}}, \mathbf{Cof}_{\mathrm{proj}}, \mathbf{Fib}_{\mathrm{proj}\text{-}\mathrm{st}}), \quad (\mathbf{W}_{\mathrm{usu}\text{-}\mathrm{st}}, \mathbf{Cof}_{\mathrm{proj}}, \mathbf{Fib}_{\mathrm{usu}\text{-}\mathrm{proj}\text{-}\mathrm{st}}), \\ (\mathbf{W}_{\mathbb{D}^1\text{-usu}\text{-}\mathrm{st}}, \mathbf{Cof}_{\mathrm{proj}}, \mathbf{Fib}_{\mathbb{D}^1\text{-usu}\text{-}\mathrm{proj}\text{-}\mathrm{st}}).$$

Leurs catégories homotopiques seront désignées respectivement par un $\mathbf{Ho}_{\mathrm{st}}$, $\mathbf{Ho}_{\mathrm{usu}\text{-}\mathrm{st}}$ et $\mathbf{Ho}_{\mathbb{D}^1\text{-usu}\text{-}\mathrm{st}}$ placé devant $\mathbf{Spect}_{T_X}^\Sigma(\mathbf{PreShv}(\mathbf{AnSm}/X, \mathfrak{M}))$. On pose également

$$\mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}^{\mathrm{an}}(X) = \mathbf{Ho}_{\mathbb{D}^1\text{-usu}\text{-}\mathrm{st}}(\mathbf{Spect}_{T_X}^\Sigma(\mathbf{PreShv}(\mathbf{AnSm}/X, \mathfrak{M}))).$$

On dispose d'un foncteur de suspension infinie

$$\mathrm{Sus}_{T_X, \Sigma}^0 : \mathbf{PreShv}(\mathbf{AnSm}/X, \mathfrak{M}) \longrightarrow \mathbf{Spect}_{T_X}^\Sigma(\mathbf{PreShv}(\mathbf{AnSm}/X, \mathfrak{M})) \quad (1.9)$$

qui à un préfaisceau F associe le T_X -spectre $(T_X^{\otimes n} \otimes F)_{n \in \mathbb{N}}$. C'est un foncteur de Quillen à gauche lorsqu'on munit la source de l'une des structures projectives considérées plus haut et le but de la variante stable de la même structure.

Par le lemme 1.10 et le fait que \mathfrak{M} est une catégorie de modèles stable, T_X est un objet inversible de la catégorie monoïdale symétrique $\mathbf{Ho}_{\mathbb{D}^1\text{-usu}}(\mathbf{PreShv}(\mathbf{AnSm}/X, \mathfrak{M}))$. On déduit de [3, Proposition 4.3.35] que (1.9) est une équivalence de Quillen lorsqu'on munit la source de sa structure projective $(\mathbb{D}^1, \mathrm{usu})$ -locale et le but de sa structure projective stable déduite de la structure projective $(\mathbb{D}^1, \mathrm{usu})$ -locale. On obtient ainsi des

équivalences de catégories (triangulées monoïdales et symétriques)

$$\begin{aligned}
 \mathbf{D}_{\mathfrak{M}}(X) &= \mathbf{Ho}_{\text{usu}}(\mathbf{PreShv}(\text{Ouv}(X), \mathfrak{M})) \\
 &\downarrow \sim \\
 &\mathbf{Ho}_{\mathbb{D}^1\text{-usu}}(\mathbf{PreShv}(\text{AnSm}/X, \mathfrak{M})) \\
 &\downarrow \sim \\
 \mathbf{Ho}_{\mathbb{D}^1\text{-usu-st}}(\mathbf{Spect}_{T_X}^{\Sigma}(\mathbf{PreShv}(\text{AnSm}/X, \mathfrak{M}))) &= \mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}^{\text{an}}(X).
 \end{aligned}
 \tag{1.10}$$

2. Réalisation de Betti et fonctorialité élémentaire

Pour la construction des catégories homotopiques stables des S -schémas le lecteur est renvoyé à [3, § 4.5]. On utilisera librement les notations de [3]. Toutefois, il s'agit de notations assez standards dont le sens n'échappera pas aux lecteurs familiers avec la théorie des motifs à la Morel et Voevodsky.

Soit k un corps de caractéristique nulle muni d'un plongement complexe $\sigma : k \subset \mathbb{C}$. Étant donné un k -schéma X , on notera X^{an} l'ensemble $X(\mathbb{C})$, des points de X à valeurs dans \mathbb{C} , muni de sa structure naturelle d'espace analytique complexe. On dispose d'un foncteur d'analytification

$$\text{An}_X : \mathbf{Sm}/X \longrightarrow \mathbf{AnSm}/X^{\text{an}}$$

qui à X -schéma lisse Y associe le X -espace analytique lisse Y^{an} . Ce foncteur est continu lorsqu'on munit \mathbf{Sm}/X de sa topologie de Nisnevich et $\mathbf{AnSm}/X^{\text{an}}$ de sa topologie usuelle. En effet, si $(Y_i \rightarrow Y)_{i \in I}$ est un recouvrement Nisnevich (respectivement étale) d'un X -schéma lisse Y , il existe un recouvrement ouvert $(U_j)_{j \in J}$ de Y^{an} qui raffine la famille $(Y_i^{\text{an}} \rightarrow Y^{\text{an}})$.

On dispose également de P -structures naturelles (au sens de [3, Définition 4.4.57]) sur \mathbf{Sm}/X et $\mathbf{AnSm}/X^{\text{an}}$ données respectivement par les petits sites étales et les petits sites des homéomorphismes locaux. Le foncteur An_X est compatible à ces P -structures. Par [3, Théorème 4.4.60], l'adjonction

$$(\text{An}_X^*, \text{An}_{X*}) : \mathbf{PreShv}(\mathbf{Sm}/X, \mathfrak{M}) \longrightarrow \mathbf{PreShv}(\mathbf{AnSm}/X^{\text{an}}, \mathfrak{M}) \tag{2.1}$$

est de Quillen relativement aux structures projectives Nis-locales et usu-locales. Étant donné que $\text{An}_X^*(\mathbb{A}_Y^1 \otimes A) = (\mathbb{A}_{Y^{\text{an}}}^{1, \text{an}}) \otimes A$ pour tout X -schéma lisse Y et $A \in \mathcal{E}$, l'adjonction (2.1) est de Quillen relativement aux structures projectives $(\mathbb{A}^1, \text{Nis})$ -locale et $(\mathbb{D}^1, \text{usu})$ -locale. On déduit également une adjonction de Quillen relativement aux structures projectives $(\mathbb{A}^1, \text{Nis})$ -locale et $(\mathbb{D}^1, \text{usu})$ -locale stables

$$\begin{aligned}
 (\text{An}_X^*, \text{An}_{X*}) : \mathbf{Spect}_{T_X}^{\Sigma}(\mathbf{PreShv}(\mathbf{Sm}/X, \mathfrak{M})) \\
 \longrightarrow \mathbf{Spect}_{T_X^{\text{an}}}^{\Sigma}(\mathbf{PreShv}(\mathbf{AnSm}/X^{\text{an}}, \mathfrak{M}))
 \end{aligned}$$

où $T_X^{\text{an}} = \text{An}^*(T_X)$. Il est clair que T_X^{an} convient au modèle projectivement cofibrant choisi à la fin de la sous-section précédente. On peut donc faire la définition suivante.

Définition 2.1. La réalisation de Betti au dessus d'un k -schéma X est le foncteur composé

$$\begin{array}{c} \mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(X) = \mathbf{Ho}_{\mathbb{A}^1\text{-Nis-st}}(\mathbf{Spect}_{T_X}^{\Sigma}(\mathbf{PreShv}(\mathbf{Sm}/X, \mathfrak{M}))) \\ \downarrow \text{LAn}^* \\ \mathbf{Ho}_{\mathbb{D}^1\text{-usu-st}}(\mathbf{Spect}_{T_X^{\text{an}}}^{\Sigma}(\mathbf{PreShv}(\mathbf{Sm}/X^{\text{an}}, \mathfrak{M}))) \\ \uparrow \sim \\ \mathbf{Ho}_{\text{usu}}(\mathbf{PreShv}(\mathbf{Ouv}(X^{\text{an}}), \mathfrak{M})) = \mathbf{D}_{\mathfrak{M}}(X^{\text{an}}). \end{array}$$

On le notera \mathbf{Betti}_X .

Rappelons que le but de cet article est d'étudier la compatibilité des foncteurs de réalisation de Betti avec les opérations de Grothendieck. Par construction, on a le lemme suivant.

Lemme 2.2. *Le foncteur \mathbf{Betti}_X est monoïdal, symétrique et unitaire.*

Dans le reste de cette sous-section, on montrera que \mathbf{Betti}_X commute avec les opérations f^* (pour f général) et $f_{\#}$ (pour f lisse).

On renvoie le lecteur à [3, § 4.5] pour la construction des opérations f^* , f_* et $f_{\#}$ dans le contexte algébrique et on traite ici le cas analytique.

Étant donné un morphisme $f : X' \rightarrow X$ d'espaces analytiques complexes, on dispose d'une adjonction de Quillen

$$(f^*, f_*) : \mathbf{Spect}_{T_X}^{\Sigma}(\mathbf{PreShv}(\mathbf{AnSm}/X, \mathfrak{M})) \longrightarrow \mathbf{Spect}_{T_{X'}}^{\Sigma}(\mathbf{PreShv}(\mathbf{AnSm}/X', \mathfrak{M}))$$

(où l'on prend $T_{X'} = f^*(T_X)$) relativement aux structures projectives stables déduites des structures $(\mathbb{D}^1, \text{usu})$ -locales. Pour montrer cela, on utilise [3, Théorème 4.4.60] (le foncteur continu $X' \times_X - : \mathbf{AnSm}/X \rightarrow \mathbf{AnSm}/X'$ étant compatible aux P -structures naturelles) et [3, Lemme 4.3.34]. On obtient ainsi des opérations (f^*, f_*) sur $\mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}^{\text{an}}(-)$.

Lemme 2.3. *Les opérations classiques f^* et f_* sur les catégories $\mathbf{D}_{\mathfrak{M}}(-)$ (voir par exemple [11, Chapitre II] pour \mathfrak{M} la catégorie des complexes de groupes abéliens) correspondent aux opérations f^* et f_* sur les catégories $\mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}^{\text{an}}(-)$ via les équivalences de catégories (1.10).*

Démonstration. On dispose d'un diagramme commutatif (à un 2-isomorphismes près) de couples de foncteurs adjoints

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{PreShv}(\mathbf{Ouv}(X), \mathfrak{M}) & \xrightarrow{(f^*, f_*)} & \mathbf{PreShv}(\mathbf{Ouv}(X'), \mathfrak{M}) \\ \downarrow (\iota_X^*, \iota_{X*}) & & \downarrow (\iota_{X'}^*, \iota_{X'*}) \\ \mathbf{PreShv}(\mathbf{AnSm}/X, \mathfrak{M}) & \xrightarrow{(f^*, f_*)} & \mathbf{PreShv}(\mathbf{AnSm}/X', \mathfrak{M}) \\ \downarrow (\text{Sus}_{T_X}^0, \text{Ev}_0) & & \downarrow (\text{Sus}_{T_{X'}}^0, \text{Ev}_0) \\ \mathbf{Spect}_{T_X}^{\Sigma}(\mathbf{PreShv}(\mathbf{AnSm}/X, \mathfrak{M})) & \xrightarrow{(f^*, f_*)} & \mathbf{Spect}_{T_{X'}}^{\Sigma}(\mathbf{PreShv}(\mathbf{AnSm}/X', \mathfrak{M})) \end{array}$$

où l'on prend $T_{X'} = f^*(T_X)$. Toutes les adjonctions ci-dessus sont de Quillen relativement aux structures:

- projectives usu-locales sur $\mathbf{PreShv}(\mathbf{Ouv}(-), \mathfrak{M})$;
- projectives $(\mathbb{D}^1, \text{usu})$ -locales sur $\mathbf{PreShv}(\mathbf{AnSm}/-, \mathfrak{M})$;
- projectives $(\mathbb{D}^1, \text{usu})$ -locales stables sur $\mathbf{Spect}_{T_-}^{\Sigma}(\mathbf{PreShv}(\mathbf{AnSm}/-, \mathfrak{M}))$.

De plus, les adjonctions verticales sont les équivalences de Quillen qui induisent les équivalences de catégories (1.10). D'où le résultat recherché. \square

Proposition 2.4. *Le foncteur de réalisation de Betti est compatible aux opérations f^* . Plus précisément, soit $f : X' \rightarrow X$ un morphisme de k -schémas de type fini. Il existe un isomorphisme naturel (de foncteurs monoïdaux, symétriques et unitaires)*

$$\theta_f : (f^{\text{an}})^* \circ \mathbf{Betti}_X \xrightarrow{\sim} \mathbf{Betti}_{X'} \circ f^* .$$

De plus, cet isomorphisme commute à la composition des morphismes de k -schémas.

Démonstration. Vu le lemme 2.3, il suffit de prouver l'énoncé correspondant pour les foncteurs d'analytification \mathbf{An}^* . Mais on dispose d'un carré commutatif d'adjonctions de Quillen

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Spect}_{T_X}^{\Sigma}(\mathbf{PreShv}(\mathbf{Sm}/X, \mathfrak{M})) & \xrightarrow{(f^*, f_*)} & \mathbf{Spect}_{T_{X'}}^{\Sigma}(\mathbf{PreShv}(\mathbf{Sm}/X', \mathfrak{M})) \\ \downarrow (\mathbf{An}_X^*, \mathbf{An}_{X*}) & & \downarrow (\mathbf{An}_{X'}^*, \mathbf{An}_{X'*}) \\ \mathbf{Spect}_{T_X^{\text{an}}}^{\Sigma}(\mathbf{PreShv}(\mathbf{AnSm}/X^{\text{an}}, \mathfrak{M})) & \xrightarrow{((f^{\text{an}})^*, f_*^{\text{an}})} & \mathbf{Spect}_{T_{X'}^{\text{an}}}^{\Sigma}(\mathbf{PreShv}(\mathbf{AnSm}/X'^{\text{an}}, \mathfrak{M})) \end{array}$$

pour les structures projectives stables $(\mathbb{A}^1, \text{Nis})$ -locales et $(\mathbb{D}^1, \text{usu})$ -locales. D'où le résultat. \square

Supposons maintenant que $f : X' \rightarrow X$ est un morphisme lisse d'espaces analytiques complexes. On dispose d'une adjonction

$$(f_{\#}, f^*) : \mathbf{Spect}_{T_{X'}}^{\Sigma}(\mathbf{PreShv}(\mathbf{AnSm}/X', \mathfrak{M})) \longrightarrow \mathbf{Spect}_{T_X}^{\Sigma}(\mathbf{PreShv}(\mathbf{AnSm}/X, \mathfrak{M}))$$

(avec $T_X' = f^*(T_X)$) qui est de Quillen relativement aux structures projectives $(\mathbb{D}^1, \text{usu})$ -locales stables. (Notons que la construction du foncteur $f_{\#}$ utilise la formule de projection $f_{\#}(f^*(-) \otimes -) \simeq (-) \otimes f_{\#}(-)$. Pour plus de détails, le lecteur peut consulter [3] et notamment le paragraphe qui suit la preuve de Proposition 4.5.19. Il s'agit certes du cas algébrique, mais le cas analytique n'est guère différent.) En utilisant les équivalences de catégories (1.10), on obtient une nouvelle preuve, plus conceptuelle, de l'existence d'un adjoint à gauche $f_{\#}$ à l'opération $f^* : \mathbf{D}_{\mathfrak{M}}(X) \rightarrow \mathbf{D}_{\mathfrak{M}}(X')$. (La preuve classique de ce fait repose sur la dualité de Poincaré–Verdier [11, Théorème 3.1.5, Proposition 3.3.2].) On a de plus la proposition suivante.

Proposition 2.5. Soit $f : X' \longrightarrow X$ un morphisme lisse de k -schémas de type fini. La transformation naturelle

$$f_{\#}^{\text{an}} \circ \text{Betti}_{X'} \longrightarrow \text{Betti}_X \circ f_{\#},$$

déduite de l'inverse de l'isomorphisme de la proposition 2.4 via les adjonctions $(f_{\#}, f^*)$ et $(f_{\#}^{\text{an}}, (f^{\text{an}})^*)$, est inversible.

Démonstration. On se ramène encore une fois à montrer l'assertion correspondante pour les foncteurs d'analytification An^* . Mais, on dispose d'un carré commutatif (à un isomorphisme canonique près) d'adjonctions

$$\begin{array}{ccc} \text{Spect}_{T_{X'}}^{\Sigma}(\text{PreShv}(\text{Sm}/X', \mathfrak{M})) & \xrightarrow{(f_{\#}, f^*)} & \text{Spect}_{T_X}^{\Sigma}(\text{PreShv}(\text{Sm}/X, \mathfrak{M})) \\ \downarrow (\text{An}_{X'}^*, \text{An}_{X'^*}) & & \downarrow (\text{An}_X^*, \text{An}_{X^*}) \\ \text{Spect}_{T_{X'}^{\text{an}}}^{\Sigma}(\text{PreShv}(\text{AnSm}/X'^{\text{an}}, \mathfrak{M})) & \xrightarrow{(f_{\#}^{\text{an}}, (f^{\text{an}})^*)} & \text{Spect}_{T_X^{\text{an}}}^{\Sigma}(\text{PreShv}(\text{AnSm}/X^{\text{an}}, \mathfrak{M})). \end{array}$$

Ce carré provient (par 2-fonctorialité des catégories de préfaisceaux et de leurs catégories de spectres) du carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} \text{Sm}/X' & \xrightarrow{c_f} & \text{Sm}/X \\ \text{An} \downarrow & & \downarrow \text{An} \\ \text{AnSm}/X'^{\text{an}} & \xrightarrow{c_{f^{\text{an}}}} & \text{AnSm}/X^{\text{an}} \end{array}$$

où c_f (respectivement $c_{f^{\text{an}}}$) désigne le foncteur qui à un X' -schéma lisse Y' (respectivement un X'^{an} -espace analytique lisse U') associe le X -schéma lisse $Y' \rightarrow X' \rightarrow X$ (respectivement le X^{an} -espace analytique lisse $U' \rightarrow X'^{\text{an}} \rightarrow X^{\text{an}}$). \square

3. Morphismes de 2-foncteurs homotopiques stables

Motivés par les résultats de la section précédente, nous introduisons la notion de morphismes de 2-foncteurs homotopiques stables. Nous démontrons ensuite un critère général qui fournira des commutativités (partielles sauf pour $f_!$) de la réalisation de Betti avec les opérations f_* , $f_!$, $f^!$ et $\underline{\text{Hom}}(-, -)$.

Pour la notion de 2-foncteurs homotopiques stables, le lecteur est renvoyé à [2, Définition 1.4.1]. On suppose donnés deux 2-foncteurs homotopiques stables H_1 et H_2 sur un schéma noethérien S . Étant donné un morphisme f entre S -schémas quasi-projectifs, on notera par le même symbole f^* les foncteurs $H_1^*(f)$ et $H_2^*(f)$. On fera le même abus de notations pour les opérations $f_{\#}$, f_* , $f_!$ et $f^!$. Cela n'entraînera pas de confusion dans la suite.

Définition 3.1. Un morphisme de 2-foncteurs homotopiques stables $R : H_1 \longrightarrow H_2$ est l'ensemble des données ci-dessous.

- (i) Un foncteur triangulé $R_X : H_1(X) \longrightarrow H_2(X)$ pour tout S -schéma quasi-projectif X .
- (ii) Une transformation naturelle inversible $\theta_f : f^* \circ R_X \xrightarrow{\sim} R_{X'} \circ f^*$ pour tout morphisme de S -schémas quasi-projectifs $f : X' \longrightarrow X$.

Ces données doivent satisfaire aux axiomes suivants.

(Mor1) Les transformations naturelles θ_f sont compatibles à la composition des S -morphisms.

(Mor2) Lorsque f est lisse, la transformation naturelle $f_{\#} \circ R_{X'} \longrightarrow R_X \circ f_{\#}$, obtenue de θ_f^{-1} via les adjonctions $(f_{\#}, f^*)$, est inversible.

Définition 3.2. Supposons que H_1 et H_2 sont des 2-foncteurs monoïdaux homotopiques stables (respectivement symétriques, unitaires) au sens de [2, Définition 2.3.1]. Soit $R : H_1 \longrightarrow H_2$ un morphisme de 2-foncteurs homotopiques stables. On dit que R est monoïdal (symétrique, unitaire) si les foncteurs R_X sont monoïdaux (respectivement symétriques, unitaires) et que les transformations naturelles θ_f sont des transformations naturelles de foncteurs monoïdaux (respectivement symétriques, unitaires).

Remarque 3.3. Dans [3, Chapitre 4], nous avons vérifié que $H_1 = \mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(-)$ est un 2-foncteur homotopique stable. On trouvera dans [11] tous les ingrédients nécessaires pour vérifier que $H_2 = \mathbf{D}_{\mathfrak{M}}((-)^{\text{an}})$ est également un 2-foncteur homotopique stable. Vu les résultats de la section précédente, les foncteurs de réalisation Betti $_X$ définissent un morphisme de 2-foncteurs homotopiques stables entre $H_1 = \mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(-)$ et $H_2 = \mathbf{D}_{\mathfrak{M}}((-)^{\text{an}})$ qui est de plus monoïdal, symétrique et unitaire.

Énonçons maintenant les trois théorèmes principaux de cette section.

Théorème 3.4. Soit $R : H_1 \longrightarrow H_2$ un morphisme de 2-foncteurs homotopiques stables au dessus d'un schéma noethérien S . Pour tout morphisme $f : X' \longrightarrow X$ entre S -schémas quasi-projectifs, il existe des transformations naturelles canoniques

$$\begin{aligned}\gamma_f &: R_X \circ f_* \longrightarrow f_* \circ R_{X'} , \\ \rho_f &: f_! \circ R_{X'} \longrightarrow R_X \circ f_! , \\ \xi_f &: R_{X'} \circ f^! \longrightarrow f^! \circ R_X\end{aligned}$$

compatibles à la composition des S -morphisms de schémas. De plus :

- (a) γ_f est inversible pour f projectif ;
- (b) ρ_f est inversible sans hypothèses sur f ;
- (c) ξ_f est inversible pour f lisse.

Pour le second théorème, on aura besoin d'une définition.

Définition 3.5. Soient $R : H_1 \rightarrow H_2$ un morphisme de 2-foncteurs homotopiques stables au dessus d'un schéma noethérien S . Un objet $A \in \text{Ob}(H_1(S))$ est dit *R-pure* si la condition suivante est satisfaite. Pour tout morphisme de S -schémas quasi-projectifs $\pi_X : X \rightarrow S$ avec X régulier et tout sous-schéma fermé régulier $i : Y \subset X$, le morphisme

$$R_Y i^! \pi_X^*(A) \xrightarrow{\xi_i} i^! R_X \pi_X^*(A)$$

est inversible. Une classe d'objets $A \in \text{Ob}(H_1(S))$ est dite *R-pure* si tous ses éléments sont R-pures.

Remarque 3.6. Gardons les notations de la définition 3.5. Lorsque S est le spectre d'un corps parfait, la condition de R-pureté est automatique. En effet, dans ce cas, X et Y sont lisses sur k . La question étant locale sur X , on peut supposer que Ω_X est libre de rang d . Les foncteurs $i^!$, π_X^* et $R_?$ commutent avec les twists de Tate (voir [2, § 1.5.3]). (La commutativité des foncteurs $R_?$ avec les twists de Tate sera établie un peu plus loin.) Étant donné que $\pi_X^! = \text{Th}(\Omega_X) \pi_X^* \simeq \pi_X^*(d)[2d]$, on se ramène à montrer que

$$R_Y i^! \pi_X^! \xrightarrow{\xi_i} i^! R_X \pi_X^!$$

est inversible. Notons $\pi_Y = \pi_X \circ i$. On dispose d'un diagramme commutatif exprimant la compatibilité de $\xi_?$ avec la composition des k -morphisms

$$\begin{array}{ccccc} R_Y i^! \pi_X^! & \xrightarrow{\xi_i} & i^! R_X \pi_X^! & \xrightarrow{\xi_{\pi_X}} & i^! \pi_X^! R_{\text{Spec}(k)} \\ \sim \downarrow & & & & \downarrow \sim \\ R_Y \pi_Y^! & \xrightarrow{\xi_{\pi_Y}} & \pi_Y^! R_{\text{Spec}(k)} & & \end{array}$$

Par le théorème 3.4, ξ_{π_X} et ξ_{π_Y} sont inversibles puisque π_X et π_Y sont lisses. D'où le résultat recherché.

Théorème 3.7. On garde les hypothèses et les notations du théorème 3.4. Soit $A \in \text{Ob}(H_1(S))$ une classe d'objets stable par twists de Tate négatifs (au sens de [2, Définition 2.2.17]) et R-pure au sens de la définition 3.5. On suppose que l'une des deux alternatives suivantes est satisfaite :

- S admet la résolution des singularités par éclatements au sens de [2, Définition 2.1.166] ;
- S admet la résolution des singularités par altérations au sens de [2, Définition 2.1.172] et H_1 est \mathbb{Q} -linéaire et quasi-séparé au sens de [2, Définition 2.1.160].

Alors, les transformations naturelles γ_f et ξ_f sont inversibles lorsqu'elles sont appliquées aux objets Λ -constructibles (au sens de [2, Définition 2.2.3]) de $H_1(X')$ et $H_1(X)$ respectivement.

On garde les hypothèses et les notations du théorème 3.4. Supposons que H_1, H_2 sont monoïdaux, symétriques, unitaires et fermés (au sens de [2, Définition 2.3.50]). On notera $\underline{\text{Hom}}(\dagger, -)$ l'adjoint à droite du foncteur $\dagger \otimes -$. Supposons également que R est monoïdal, symétrique et unitaire. On obtient une transformation naturelle en $(A, B) \in \text{Ob}(H_1(X))^2$

$$R_X(\underline{\text{Hom}}(A, B)) \longrightarrow \underline{\text{Hom}}(R_X(A), R_X(B)) \quad (3.1)$$

par adjonction à partir de la composée

$$R_X(A) \otimes R_X(\underline{\text{Hom}}(A, B)) \xrightarrow{\sim} R_X(A \otimes \underline{\text{Hom}}(A, B)) \xrightarrow{\delta} R_X(B) .$$

(Ci-dessus, δ désigne la counité de l'adjonction $(A \otimes -, \underline{\text{Hom}}(A, -))$.) On peut maintenant énoncer notre troisième résultat.

Théorème 3.8. *Gardons les hypothèses ci-dessus. On suppose de plus que les foncteurs $\underline{\text{Hom}}(-, A)$ sont triangulés pour tout $A \in \text{Ob}(H_i(X))$ avec X un S -schéma quasi-projectif. Soit $\Lambda \subset \text{Ob}(H_1(S))$ une classe d'objets qui satisfait aux conditions suivantes :*

- Λ est stable par twists de Tate négatifs au sens de [2, Définition 2.2.17] ;
- Λ est quasi-pure au sens de [2, Définition 2.2.28] ;
- Λ est R -pure au sens de la définition 3.5 ;
- Λ contient un objet unité $\mathbf{1}$ et elle est stable par \otimes au sens de la définition [2, Définition 2.3.59] ;
- tout objet A dans Λ est fortement dualisable (i.e., la transformation naturelle $\underline{\text{Hom}}(A, \mathbf{1}) \otimes - \longrightarrow \underline{\text{Hom}}(A, -)$ est inversible) et son dual fort $A^\vee = \underline{\text{Hom}}(A, \mathbf{1})$ appartient à Λ (à un isomorphisme près).

On suppose enfin que l'une des deux alternatives suivantes est satisfaite :

- S admet la résolution des singularités par éclatements au sens de [2, Définition 2.1.166] ;
- S admet la résolution des singularités par altérations au sens de [2, Définition 2.1.172] et H_1 est \mathbb{Q} -linéaire et quasi-séparé au sens de [2, Définition 2.1.160].

Alors, (3.1) est inversible pour A et B des objets Λ -constructibles.

Remarque 3.9. Nous avons énoncé les théorèmes 3.4, 3.7 et 3.8 dans une généralité bien plus grande que celle nécessaire pour le cas de la réalisation de Betti. On espère en effet, que ces théorèmes seront utiles pour établir la compatibilité des opérations de Grothendieck pour d'autres réalisations classiques, notamment la réalisation ℓ -adique.

La preuve des théorèmes 3.4, 3.7 et 3.8 occupera le reste de la section. Dans la suite, on fixe un morphisme de 2-foncteurs homotopiques stables $R : H_1 \longrightarrow H_2$. Soit $f : X' \longrightarrow X$

un morphisme de S -schémas quasi-projectifs. On déduit de θ_f , via les adjonctions (f^*, f_*) , une transformation naturelle

$$\gamma_f : R_X \circ f_* \longrightarrow f_* \circ R_{X'}.$$

On a le lemme facile suivant.

Lemme 3.10. *Soit $i : Y \longrightarrow X$ une immersion fermée de S -schémas quasi-projectifs. La transformation naturelle $\gamma_i : R_X \circ i_* \longrightarrow i_* \circ R_Y$ est inversible.*

Démonstration. Notons j l'immersion ouverte complémentaire à i . Par l'axiome de localité (voir [2, Définition 1.4.1]), il suffit de montrer que $i^* \gamma_i$ et $j^* \gamma_i$ sont inversibles. Pour $i^* \gamma_i$, on utilise le carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} i^* R_X i_* & \xrightarrow{i^* \gamma_i} & i^* i_* R_Y \\ \sim \downarrow \theta_i & & \downarrow \sim \\ R_Y i^* i_* & \xrightarrow{\sim} & R_Y \end{array}$$

et le fait que θ_i est inversible ainsi que les morphismes de counité des adjonctions (i^*, i_*) . Pour $j^* \gamma_i$, on remarque que $j^* i_* R_Y \simeq 0$ et $j^* R_X i_* \simeq R_{X-Y} j^* i_* \simeq 0$. Le lemme est démontré. \square

Soit X un S -schéma quasi-projectif et \mathcal{M} un \mathcal{O}_X -module libre de rang fini. Rappelons que $\mathrm{Th}(\mathcal{M})$ désigne le foncteur $p_{\#} s_*$ avec $p : \mathbb{V}(\mathcal{M}) \longrightarrow X$ la projection du fibré vectoriel

$$\mathbb{V}(\mathcal{M}) = \mathrm{Spec} \left(\bigoplus_n \mathrm{Sym}^n(\mathcal{M}) \right)$$

et s sa section nulle. L'endofoncteur $\mathrm{Th}(\mathcal{M})$ est une équivalence de catégories par [2, 1.5.7] dont l'inverse est $\mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{M}) = s^! p^*$. On définit une transformation naturelle $\mathrm{Th}(\mathcal{M}) \circ R_X \longrightarrow R_X \circ \mathrm{Th}(\mathcal{M})$ en prenant la composée

$$p_{\#} s_* R_X \xrightarrow{\gamma_s} p_{\#} R_{\mathbb{V}(\mathcal{M})} s_* \xrightarrow{\sim} R_X p_{\#} s_*.$$

Du lemme 3.10 on déduit que cette transformation naturelle est inversible. Par adjonction, on obtient également une transformation naturelle inversible $R_X \circ \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{M}) \simeq \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{M}) \circ R_X$.

Soit maintenant $f : X' \longrightarrow X$ un morphisme lisse de S -schémas quasi-projectifs. Rappelons que $f_!$ est le foncteur composé $f_{\#} \circ \mathrm{Th}^{-1}(\Omega_f)$ avec Ω_f le $\mathcal{O}_{X'}$ -module des différentielles de Kähler relatives. On définit une transformation naturelle inversible $f_! \circ R_{X'} \xrightarrow{\sim} R_X \circ f_!$ par la composée

$$f_! R_{X'} = f_{\#} \mathrm{Th}^{-1}(\Omega_f) R_{X'} \xrightarrow{\sim} f_{\#} R_{X'} \mathrm{Th}^{-1}(\Omega_f) \xrightarrow{\sim} R_X f_{\#} \mathrm{Th}^{-1}(\Omega_f) = R_X f_!. \quad (3.2)$$

On a le résultat suivant.

Proposition 3.11. *Il existe une unique famille de transformations naturelles $\rho_f : f_! \circ R_{X'} \rightarrow R_X \circ f_!$ indexée par les morphismes $f : X' \rightarrow X$ de S -schémas quasi-projectifs et vérifiant les trois conditions suivantes.*

- (i) *Les ρ_f sont compatibles à la composition des morphismes de S -schémas quasi-projectifs.*
- (ii) *Si f est lisse, ρ_f est donnée par la composée (3.2).*
- (iii) *Si i est une immersion fermée, $\rho_i = (\gamma_i)^{-1}$.*

De plus, les ρ_f sont inversibles pour tout f .

Démonstration. L'unicité de la famille découle du fait que tout morphisme de S -schémas quasi-projectifs se factorise par une immersion fermée suivie d'un morphisme lisse (voir [2, § 1.3.5]). Ceci entraîne également que les ρ_f sont inversibles. Il reste donc à prouver l'existence de cette famille.

Soit $f : X' \rightarrow X$ un morphisme de S -schémas quasi-projectifs. Choisissons une factorisation $f = p \circ i$ avec p lisse et i une immersion fermée. Notons W la source de p égale au but de i . On définit alors ρ_f par la composée

$$f_! R_{X'} \simeq p_! i_* R_{X'} \xrightarrow{\gamma_i^{-1}} p_! R_W i_* \xrightarrow{\rho_p} R_X p_! i_* \simeq R_X f_!.$$

Il s'agit de montrer que la transformation naturelle ainsi obtenue ne dépend pas du choix de la factorisation. La vérification de ce fait est longue et pénible. Notons uniquement qu'on se ramène par des arguments standards au cas où le morphisme f est lui-même lisse. Dans ce cas, le résultat recherché découle de la compatibilité des foncteurs $R_?$ avec l'isomorphisme de pureté. La preuve de cette compatibilité est complètement analogue à celle de [2, Proposition 1.6.22]. Les détails sont laissés aux lecteurs. \square

En reprenant la construction de la transformation naturelle $\alpha_f : f_! \rightarrow f_*$ (voir [2, Définition 1.7.1]) on peut montrer le résultat suivant.

Lemme 3.12. *Soit $f : X' \rightarrow X$ un morphisme de S -schémas quasi-projectifs. Le carré*

$$\begin{array}{ccc} R_X \circ f_! & \xleftarrow[\sim]{\rho_f} & f_! \circ R_{X'} \\ \alpha_f \downarrow & & \downarrow \alpha_f \\ R_X \circ f_* & \xrightarrow{\gamma_f} & f_* \circ R_{X'} \end{array}$$

commute.

En utilisant la proposition 3.11, le lemme 3.12 et [2, Théorème 1.7.17], on obtient le résultat suivant.

Corollaire 3.13. *Soit $f : X' \rightarrow X$ un morphisme projectif entre S -schémas quasi-projectifs. La transformation naturelle $\gamma_f : R_X \circ f_* \rightarrow f_* \circ R_{X'}$ est inversible.*

Soit $f : X' \rightarrow X$ un morphisme de S -schémas quasi-projectifs. On déduit de ρ_f , via l'adjonction $(f^!, f^!)$, une transformation naturelle

$$\xi_f : R_{X'} \circ f^! \longrightarrow f^! \circ R_X.$$

Lorsque f est lisse, on a $f^! = \mathrm{Th}(\Omega_f) \circ f^*$ et ξ_f est la composée de θ_f^{-1} et d'un isomorphisme de commutativité avec les équivalences de Thom. On a donc, le lemme suivant.

Lemme 3.14. *Soit $f : X' \rightarrow X$ un morphisme lisse de S -schémas quasi-projectifs. La transformation naturelle ξ_f est inversible.*

À ce stade, nous avons démontré le théorème 3.4. On supposera maintenant que les hypothèses du théorème 3.7 sont satisfaites. Notons (comme dans [2, Définition 2.2.3]) $H_{1,A}^{\mathrm{ct}}(X)$ la sous-catégorie triangulée stable par facteurs directs de $H_1(X)$ engendrée par les objets de la forme $g_{\#}\pi_U^*A$ avec $g : U \rightarrow X$ un morphisme lisse de S -schémas quasi-projectifs, $\pi_U : U \rightarrow S$ la projection structurale et $A \in \mathcal{A}$. Les objets de $H_{1,A}^{\mathrm{ct}}(X)$ sont dits \mathcal{A} -constructibles.

L'étape suivante consiste à montrer la commutativité de $R_?$ avec les images inverses extraordinaires après application aux objets \mathcal{A} -constructibles. Le cas essentiel est le suivant.

Proposition 3.15. *Soit $i : Y \rightarrow X$ une immersion fermée de S -schémas quasi-projectifs. La transformation naturelle $\xi_i : R_Y \circ i^! \rightarrow i^! \circ R_X$ est inversible lorsqu'elle est appliquée aux objets \mathcal{A} -constructibles de $H_1(X)$.*

Démonstration. Par [2, Proposition 2.2.27], on peut engendrer la catégorie $H_{1,A}^{\mathrm{ct}}(X)$ par les objets de la forme $f_*\pi_{X'}^*A(n)$ avec $A \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{Z}$ et

- $f : X' \rightarrow X$ projectif,
- X' est régulier et connexe,
- la partie $f^{-1}(Y) \subset X'$ est soit X' tout entier soit l'union de diviseurs réguliers à croisements normaux.

Étant donné que les foncteurs R_X , $R_{X'}$ et $i^!$ sont triangulés, il suffit de montrer que les flèches

$$R_Y i^! f_* \pi_{X'}^* A \longrightarrow i^! R_X f_* \pi_{X'}^* A$$

sont inversibles, avec f comme ci-dessus. Formons le carré cartésien de S -schémas quasi-projectifs

$$\begin{array}{ccc} Y' & \xrightarrow{i'} & X' \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ Y & \xrightarrow{i} & X. \end{array}$$

On a un isomorphisme de changement de base $i^! f_* \simeq f'_* i'^!$ et un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} R_Y i^! f_* & \longrightarrow & i^! R_X f_* & \xrightarrow{(1)} & i^! f_* R_{X'} \\ \sim \downarrow & & & & \downarrow \sim \\ R_Y f'_* i'^! & \xrightarrow{(2)} & f'_* R_{Y'} i'^! & \longrightarrow & f'_* i'^! R_{X'} \end{array}$$

Les transformations naturelles (1) et (2) sont inversibles par le corollaire 3.13. Il suffit donc de prouver que

$$\xi_{i'} : R_{Y'} i'^! \pi_{X'}^*(A) \longrightarrow i'^! R_{X'} \pi_{X'}^*(A)$$

est inversible. Lorsque $Y' = X'$, il n'y a rien à montrer. Lorsque Y' est un diviseur à croisements normaux, le résultat recherché découle du lemme 3.16 ci-dessous. \square

Lemme 3.16. Soit $\pi_X : X \rightarrow S$ un S -schéma quasi-projectif. Soit $i : Y \subset X$ un diviseur à croisements normaux dans un sous-schéma fermé régulier $H \subset X$. Alors, le morphisme

$$\xi_i : R_Y i^! \pi_X^*(A) \longrightarrow i^! R_X \pi_X^*(A)$$

est inversible pour tout $A \in \mathcal{A}$.

Démonstration. Par le lemme 3.10 et la pleine fidélité des foncteurs i_* , il revient au même de démontrer que

$$R_X i_* i^! \pi_X^*(A) \longrightarrow i_* i^! R_X \pi_X^*(A)$$

est inversible. On écrit $Y = \bigcup_{i=1}^n D_i$ avec D_i des diviseurs réguliers de H et on raisonne par récurrence sur n . Lorsque $n = 1$, le résultat découle de la propriété de R -pureté imposée à la classe \mathcal{A} . Supposons que $n \geq 2$. On pose $C_i = D_i \cap D_n$ pour $1 \leq i \leq n-1$, $Z = \bigcup_{i=1}^{n-1} C_i$ et $T = \bigcup_{i=1}^{n-1} D_i$. Avec ces notations, on a un carré cartésien d'immersions fermées

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{s} & D_n \\ t \downarrow & \searrow z & \downarrow a \\ T & \xrightarrow{b} & Y \end{array}$$

On déduit de [2, Proposition 1.4.9] un morphisme de 2-triangles distingués

$$\begin{array}{ccccccc} R_X(i \circ z)_*(i \circ z)^! & \longrightarrow & R_X(i \circ b)_*(i \circ b)^! \oplus R_X(i \circ a)_*(i \circ a)^! & \longrightarrow & R_X i_* i^! & \longrightarrow & \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ (i \circ z)_*(i \circ z)^! R_X & \longrightarrow & (i \circ b)_*(i \circ b)^! R_X \oplus (i \circ a)_*(i \circ a)^! R_X & \longrightarrow & i_* i^! R_X & \longrightarrow & \end{array}$$

On utilise alors l'hypothèse de récurrence et le fait que T et Z sont des diviseurs à croisements normaux de H et D_n , réunion de $n-1$ diviseurs réguliers. \square

Le lemme 3.14 et la proposition 3.15 entraînent que les transformations naturelles ξ_f sont inversibles après application aux objets Λ -constructibles pour tout morphisme f de S -schémas quasi-projectifs.

Corollaire 3.17. *Soit $j : U \rightarrow X$ une immersion ouverte de S -schémas quasi-projectifs. La transformation naturelle $\gamma_j : R_X \circ j_* \rightarrow j_* \circ R_U$ est inversible lorsqu'elle est appliquée aux objets Λ -constructibles de $H_1(U)$.*

Démonstration. Soit $i : Y \rightarrow X$ l'immersion du fermé complémentaire à U . On déduit de [2, Proposition 1.4.9] un morphisme de 2-triangles distingués

$$\begin{array}{ccccccc} R_X i_* i^! & \longrightarrow & R_X & \longrightarrow & R_X j_* j^* & \longrightarrow & \\ \downarrow & & \parallel & & \downarrow & & \\ i_* i^! R_X & \longrightarrow & R_X & \longrightarrow & j_* j^* R_X & \longrightarrow & \end{array}$$

Par la proposition 3.15, la transformation naturelle de droite est inversible après application aux objets Λ -constructibles. Le résultat découle alors du fait que $j^* : H_{1,\Lambda}^{\text{ct}}(X) \rightarrow H_{1,\Lambda}^{\text{ct}}(U)$ est essentiellement surjectif. \square

Les corollaires 3.13 et 3.17 entraînent que γ_f est inversible après application aux objets Λ -constructibles pour tout morphisme f de S -schémas quasi-projectifs. On a ainsi achevé la preuve du théorème 3.7.

On passe maintenant à la commutativité avec les foncteurs $\underline{\text{Hom}}(-, -)$. On travaillera dans la suite sous les hypothèses du théorème 3.8. On aura besoin du lemme suivant.

Lemme 3.18. *Soit $f : X' \rightarrow X$ un morphisme lisse de S -schémas quasi-projectifs. On dispose d'un diagramme commutatif*

$$\begin{array}{ccccc} R_X(\underline{\text{Hom}}(f_{\#}(A), B)) & \longrightarrow & \underline{\text{Hom}}(R_X f_{\#}(A), R_X(B)) & \xrightarrow{\sim} & \underline{\text{Hom}}(f_{\#} R_{X'}(A), R_X(B)) \\ \downarrow \sim & & & & \downarrow \sim \\ & & & & f_* \underline{\text{Hom}}(R_{X'}(A), f^* R_X(B)) \\ & & & & \downarrow \sim \theta_f \\ R_X f_* \underline{\text{Hom}}(A, f^*(B)) & \xrightarrow{\gamma_f} & f_* R_{X'} \underline{\text{Hom}}(A, f^*(B)) & \longrightarrow & f_* \underline{\text{Hom}}(R_{X'}(A), R_{X'} f^*(B)) \end{array}$$

naturel en $A \in H_1(X')$ et $B \in H_1(X)$.

Démonstration. Les flèches non-nommées du diagramme de l'énoncé sont des morphismes du type (3.1) et des isomorphismes $\underline{\text{Hom}}(f_{\#}(-), (-)) \simeq f_* \underline{\text{Hom}}((-), f^*(-))$ obtenus par adjonction de la formule de projection $f_{\#}((-) \otimes f^*(-)) \simeq f_{\#}(-) \otimes (-)$.

En passant aux foncteurs adjoints à gauche des foncteurs f^* et $\underline{\mathrm{Hom}}(\dagger, -)$ dans le diagramme de l'énoncé, on obtient

$$\begin{array}{ccc} f_{\#}(\mathrm{R}_{X'}(A) \otimes f^* \mathrm{R}_X(C)) & \xrightarrow{\sim} & f_{\#}(\mathrm{R}_{X'}(A)) \otimes \mathrm{R}_X(C) \xrightarrow{\sim} \mathrm{R}_X(f_{\#}(A)) \otimes \mathrm{R}_X(C) \\ \downarrow \sim & & \downarrow \sim \\ f_{\#}(\mathrm{R}_{X'}(A) \otimes \mathrm{R}_{X'} f^*(C)) & \xrightarrow{\sim} & f_{\#} \mathrm{R}_{X'}(A \otimes f^*(C)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{R}_X f_{\#}(A \otimes f^*(C)). \end{array}$$

Il est facile de voir que le diagramme ci-dessus est commutatif. Le lemme est démontré. \square

Pour montrer que (3.1) est inversible avec A et B des objets Λ -constructibles, on peut supposer que $A = g_{\#} \pi_U^* A_0$ pour $g : U \rightarrow X$ un morphisme lisse de S -schémas quasi-projectifs, π_U la projection structurale du S -schéma U et $A_0 \in \Lambda$. Par le lemme 3.18, il suffit de montrer que les morphismes

$$\mathrm{R}_X g_* \underline{\mathrm{Hom}}(\pi_U^*(A_0), g^*(B)) \xrightarrow{\gamma_g} g_* \mathrm{R}_U \underline{\mathrm{Hom}}(\pi_U^*(A_0), g^*(B)), \quad (3.3)$$

$$\mathrm{R}_U \underline{\mathrm{Hom}}(\pi_U^*(A_0), g^*(B)) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{R}_U \pi_U^*(A_0), \mathrm{R}_{X'} g^*(B)) \quad (3.4)$$

sont inversibles. Or, $\underline{\mathrm{Hom}}(\pi_U^*(A_0), g^*(B))$ est un objet Λ -constructible par [2, Proposition 2.3.62]. Le théorème 3.7 assure donc que (3.3) est inversible. Il reste donc à traiter le morphisme (3.4). En d'autres termes, on peut supposer que $g = \mathrm{id}_X$, i.e., que $A = \pi_X^*(A_0)$. Étant donné que A_0 est fortement dualisable, (3.4) s'identifie à l'inverse de l'isomorphisme structural du foncteur monoidal R_X

$$\mathrm{R}_X(\pi_X^*(A_0^\vee) \otimes B) \xrightarrow{\sim} \mathrm{R}_X \pi_X^*(A_0^\vee) \otimes \mathrm{R}_X(B)$$

avec $A_0^\vee = \underline{\mathrm{Hom}}(A_0, \mathbb{1})$ le dual fort de A_0 . Ceci achève la preuve du théorème 3.8. En spécialisant à la réalisation de Betti, on obtient le résultat suivant.

Théorème 3.19. Soient k un corps de caractéristique nulle muni d'un plongement complexe $\sigma : k \subset \mathbb{C}$ et $f : X' \rightarrow X$ un morphisme de k -schémas quasi-projectifs.

(A) On dispose de transformations naturelles inversibles

$$\theta_f : (f^{\mathrm{an}})^* \circ \mathrm{Betti}_X \xrightarrow{\sim} \mathrm{Betti}_{X'} f^* \quad \text{et} \quad \rho_f : \mathrm{Betti}_X \circ f_! \xrightarrow{\sim} f_!^{\mathrm{an}} \circ \mathrm{Betti}_{X'}$$

compatibles à la composition des morphismes de k -schémas.

(B) Les transformations naturelles θ_f et ρ_f induisent par adjonction des transformations naturelles

$$\gamma_f : \mathrm{Betti}_X \circ f_* \longrightarrow f_*^{\mathrm{an}} \circ \mathrm{Betti}_{X'} \quad \text{et} \quad \xi_f : \mathrm{Betti}_{X'} \circ f^! \longrightarrow (f^{\mathrm{an}})^! \circ \mathrm{Betti}_X.$$

Ces transformations naturelles sont inversibles lorsqu'elles sont appliquées aux objets compacts de $\mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(X')$ et $\mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(X)$ respectivement.

(C) Soit X un k -schéma quasi-projectif. On dispose d'un morphisme

$$\mathrm{Betti}_X(\underline{\mathrm{Hom}}(A, B)) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{Betti}_X(A), \mathrm{Betti}_X(B)) \quad (3.5)$$

naturel en A et B dans $\mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(X)$. Supposons que les objets compacts de $\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})$ sont fortement dualisables. Alors (3.5) est inversible pour A et B des objets compacts.

Démonstration. On prendra pour A la classe des objets de la forme $\mathrm{Sus}_T^p(\mathrm{Spec}(k) \otimes A)$ avec $p \in \mathbb{N}$ et A un objet compact de $\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})$. Dans ce cas, A -constructible est synonyme de compact. En effet, pour X un k -schéma quasi-projectif, la catégorie triangulée avec sommes infinies $\mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(X)$ est compactement engendrée par les objets de la forme $\mathrm{Sus}_T^p(U \otimes A)$ avec U un X -schéma lisse, $A \in \mathcal{E}$ et $p \in \mathbb{N}$. Dans la sous-section 4.5.5 de [3], ceci est démontré pour \mathfrak{M} la catégorie des spectres symétriques ou celle des complexes de groupes abéliens (voir [3, Théorème 4.5.67]). Pour \mathfrak{M} une catégorie de coefficients générale, on trouvera une preuve dans [4] basée sur la propriété de Brown–Gersten [6] mais qui est s'applique à un cas plus général. Il suffit alors de se restreindre au cas de la valuation triviale pour obtenir la propriété recherchée.

Pour justifier le théorème 3.19, il nous faut donc montrer que les conditions d'application des théorèmes 3.7 et 3.8 sont vérifiées dans notre situation. Comme k est de caractéristique nulle, on dispose de la résolution des singularités par éclatements par [10]. La classe A est clairement stable par twists de Tate négatifs. Les conditions de pureté sont automatiques lorsque S est le spectre d'un corps parfait. Enfin, si les objets compacts de $\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})$ sont fortement dualisables, les quatrième et cinquième conditions sur A , qu'on a imposées dans l'énoncé du théorème 3.8, sont satisfaites. Seule la quatrième condition nécessite une preuve. Mais si $A \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{M})$ est compact, $\underline{\mathrm{Hom}}(A, -) \simeq A^\vee \otimes -$ commute aux sommes infinies. Ceci entraîne que $A \otimes -$ préserve les objets compacts. \square

4. Compatibilité de la réalisation de Betti avec les foncteurs cycles proches

Comme avant, k désignera un corps muni d'un plongement complexe $\sigma : k \subset \mathbb{C}$. Dans cette dernière section, on étudie la compatibilité des foncteurs cycles proches avec la réalisation de Betti. Pour cela, on a besoin d'étendre la réalisation de Betti aux diagrammes de k -schémas. Rappelons qu'un diagramme de k -schémas (respectivement d'espaces analytiques complexes) $(\mathcal{F}, \mathcal{I})$ est un foncteur covariant \mathcal{F} défini sur une petite catégorie \mathcal{I} à valeurs dans la catégorie des k -schémas (respectivement des espaces analytiques complexes).

Soit $(\mathcal{F}, \mathcal{I})$ un diagramme d'espaces analytiques complexes. Par analogie avec la sous-section 4.5.1 de [3], on notera $\mathrm{AnSm}/(\mathcal{F}, \mathcal{I})$ la catégorie des couples (U, i) avec $i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I})$ et U un $\mathcal{F}(i)$ -espace analytique lisse. On note aussi $\mathrm{Ouv}(\mathcal{F}, \mathcal{I})$ la catégorie des couples (U, i) avec $i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I})$ et U un ouvert de $\mathcal{F}(i)$. On dispose d'une inclusion évidente $\iota_{\mathcal{F}} : \mathrm{Ouv}(\mathcal{F}, \mathcal{I}) \subset \mathrm{AnSm}/(\mathcal{F}, \mathcal{I})$ qui induit un morphisme de sites pour les topologies usuelles.

Sauf mention explicite du contraire, on munit les catégories $\mathbf{PreShv}(\mathrm{Ouv}(\mathcal{F}, \mathcal{I}), \mathfrak{M})$ et $\mathbf{PreShv}(\mathrm{AnSm}/(\mathcal{F}, \mathcal{I}), \mathfrak{M})$ des structures de modèles semi-projectives usu-locale et

$(\mathbb{D}^1, \text{usu})$ -locale respectivement. Ces structures de modèles sont telles que les cofibrations et les équivalences faibles sont détectées par leurs restrictions à $\text{Ouv}(\mathcal{F}(i))$ et $\text{AnSm}/\mathcal{F}(i)$ pour tout $i \in \text{Ob}(\mathcal{I})$. L'existence de telles structures de modèles se démontre en adaptant la preuve de [3, Proposition 4.5.9]. On notera $\mathbb{D}_{\mathfrak{M}}(\mathcal{F}, \mathcal{I})$ la catégorie homotopique $\mathbf{Ho}_{\text{usu}}(\mathbf{PreShv}(\text{Ouv}(\mathcal{F}, \mathcal{I}), \mathfrak{M}))$.

On définit les morphismes de diagrammes d'espaces analytiques complexes en adaptant [2, Définition 2.4.4]. Étant donné un morphisme de diagrammes d'espaces analytiques complexes $(f, \alpha) : (\mathcal{G}, \mathcal{J}) \rightarrow (\mathcal{F}, \mathcal{I})$, on a un carré commutatif (à un isomorphisme près) d'adjonctions de Quillen

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{PreShv}(\text{Ouv}(\mathcal{F}, \mathcal{I}), \mathfrak{M}) & \xrightarrow{((f, \alpha)^*, (f, \alpha)_*)} & \mathbf{PreShv}(\text{Ouv}(\mathcal{G}, \mathcal{J}), \mathfrak{M}) \\ \downarrow (\iota_{\mathcal{F}}^*, \iota_{\mathcal{F}*}) & & \downarrow (\iota_{\mathcal{G}}^*, \iota_{\mathcal{G}*}) \\ \mathbf{PreShv}(\text{AnSm}/(\mathcal{F}, \mathcal{I}), \mathfrak{M}) & \xrightarrow{((f, \alpha)^*, (f, \alpha)_*)} & \mathbf{PreShv}(\text{AnSm}/(\mathcal{G}, \mathcal{J}), \mathfrak{M}). \end{array}$$

Les foncteurs $(f, \alpha)^* = f^* \circ \alpha^*$ sont définis comme dans le cas algébrique (voir [3, Définition 4.5.1]). Les adjonctions verticales dans le carré ci-dessus sont des équivalences de Quillen comme le montre la proposition suivante.

Proposition 4.1. *Soit $(\mathcal{F}, \mathcal{I})$ un diagramme d'espaces analytiques complexes. Alors, l'adjonction*

$$(\iota_{\mathcal{F}}^*, \iota_{\mathcal{F}*}) : \mathbf{PreShv}(\text{Ouv}(\mathcal{F}, \mathcal{I}), \mathfrak{M}) \longrightarrow \mathbf{PreShv}(\text{AnSm}/(\mathcal{F}, \mathcal{I}), \mathfrak{M})$$

est un équivalence de Quillen.

Démonstration. Pour un objet i de \mathcal{I} , on note $i : \mathcal{F}(i) \rightarrow (\mathcal{F}, \mathcal{I})$ le morphisme de diagrammes d'espaces analytiques complexes qui est l'identité sur $\mathcal{F}(i)$. Comme i^* préserve les équivalences usu-locales et $(\mathbb{D}^1, \text{usu})$ -locales, il se dérive trivialement. On dispose d'un isomorphisme naturel $i^* \circ \iota_{\mathcal{F}}^* \simeq \iota_{\mathcal{F}(i)}^* \circ i^*$ qui induit par adjonction une transformation naturelle

$$i^* \circ \text{R}\iota_{\mathcal{F}*} \longrightarrow \text{R}\iota_{\mathcal{F}(i)*} \circ i^*.$$

On vérifie immédiatement que cette transformation naturelle est inversible. Par ailleurs, on a des diagrammes commutatifs

$$\begin{array}{ccc} i^* & \xrightarrow{\quad} & i^* \text{R}\iota_{\mathcal{F}*} \iota_{\mathcal{F}}^* \\ & \searrow & \downarrow \sim \\ & & \text{R}\iota_{\mathcal{F}(i)*} \iota_{\mathcal{F}(i)}^* \end{array} \quad \begin{array}{ccc} i^* \iota_{\mathcal{F}}^* \text{R}\iota_{\mathcal{F}*} & \xrightarrow{\quad} & i^* \\ \downarrow \sim & & \nearrow \\ \iota_{\mathcal{F}(i)}^* \text{R}\iota_{\mathcal{F}(i)*} i^* & & \end{array}$$

Le résultat découle maintenant du théorème 1.8 et du fait que la famille des i^* est conservative. □

Supposons que le morphisme de diagrammes d'espaces analytiques complexes $(f, \alpha) : (\mathcal{G}, \mathcal{J}) \rightarrow (\mathcal{F}, \mathcal{I})$ est lisse argument par argument (i.e., les morphismes $f(j) : \mathcal{G}(j) \rightarrow \mathcal{F}(\alpha(j))$ sont lisses pour tout $j \in \text{Ob}(\mathcal{J})$). On dispose alors d'une adjonction

$$((f, \alpha)_{\#}, (f, \alpha)^*) : \mathbf{PreShv}(\mathbf{AnSm}/(\mathcal{G}, \mathcal{J}), \mathfrak{M}) \longrightarrow \mathbf{PreShv}(\mathbf{AnSm}/(\mathcal{F}, \mathcal{I}), \mathfrak{M}) .$$

La construction du foncteur $(f, \alpha)_{\#}$ est calquée sur son analogue algébrique (voir [3, Proposition 4.5.4]). Il s'agit d'une adjonction de Quillen pour les structures projectives (et non semi-projectives!) $(\mathbb{D}^1, \text{usu})$ -locales. En utilisant la proposition 4.1, on obtient alors l'existence d'une adjonction

$$((f, \alpha)_{\#}, (f, \alpha)^*) : \mathbb{D}_{\mathfrak{M}}(\mathcal{F}, \mathcal{I}) \longrightarrow \mathbb{D}_{\mathfrak{M}}(\mathcal{G}, \mathcal{J}) .$$

Dans la suite, on fixe un remplacement cofibrant T de $\mathbf{Cof}(\mathbb{G}\mathbf{m}^{\text{an}} \otimes \mathbb{1} \rightarrow \mathbb{A}^{1, \text{an}} \otimes \mathbb{1})$ dans $\mathbf{PreShv}(\mathbf{AnSm}/pt, \mathfrak{M})$ avec $\mathbb{1} \in \mathcal{E}$ l'objet unité de \mathfrak{M} (supposée désormais monoïdale symétrique et unitaire). On note $T_{\mathcal{F}}$ l'image inverse de T suivant la projection $(\mathcal{F}, \mathcal{I}) \rightarrow pt$. Le foncteur de suspension

$$\text{Sus}_{T_{\mathcal{F}}}^0 : \mathbf{PreShv}(\mathbf{AnSm}/(\mathcal{F}, \mathcal{I}), \mathfrak{M}) \longrightarrow \mathbf{Spect}_{T_{\mathcal{F}}}^{\Sigma}(\mathbf{PreShv}(\mathbf{AnSm}/(\mathcal{F}, \mathcal{I}), \mathfrak{M}))$$

est une équivalence de Quillen à gauche lorsqu'on munit la source de la structure semi-projective $(\mathbb{D}^1, \text{usu})$ -locale et le but de la structure projective stable déduite de la structure semi-projective $(\mathbb{D}^1, \text{usu})$ -locale (comme dans [3, Définition 4.5.21]). La catégorie homotopique de cette dernière structure sera notée $\mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}^{\text{an}}(\mathcal{F}, \mathcal{I})$. On a donc une équivalence de catégories

$$\mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}^{\text{an}}(\mathcal{F}, \mathcal{I}) \simeq \mathbb{D}_{\mathfrak{M}}(\mathcal{F}, \mathcal{I}). \quad (4.1)$$

Les adjonctions de Quillen $((f, \alpha)^*, (f, \alpha)_*)$ induisent des adjonctions de Quillen sur les catégories de T -spectres. On a donc un couple d'opérations adjointes

$$((f, \alpha)^*, (f, \alpha)_*) : \mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(\mathcal{F}, \mathcal{I}) \longrightarrow \mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(\mathcal{G}, \mathcal{J})$$

qui correspondent aux opérations de mêmes noms sur $\mathbb{D}_{\mathfrak{M}}(-, -)$ via les équivalences de catégories (4.1). Lorsque (f, α) est lisse argument par argument, on dispose d'un couple d'opérations adjointes

$$((f, \alpha)_{\#}, (f, \alpha)^*) : \mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(\mathcal{G}, \mathcal{J}) \longrightarrow \mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(\mathcal{F}, \mathcal{I}).$$

Supposons maintenant que $(\mathcal{F}, \mathcal{I})$ est un diagramme de k -schémas de type fini. On note $(\mathcal{F}^{\text{an}}, \mathcal{I})$ le diagramme d'espaces analytiques complexes obtenu en composant \mathcal{F} avec le foncteur d'analytification. On a une adjonction de Quillen

$$\begin{aligned} (\mathbf{An}_{\mathcal{F}}^*, \mathbf{An}_{\mathcal{F}*}) : \mathbf{Spect}_{T_{\mathcal{F}}}^{\Sigma}(\mathbf{PreShv}(\mathbf{Sm}/(\mathcal{F}, \mathcal{I}), \mathfrak{M})) \\ \longrightarrow \mathbf{Spect}_{T_{\mathcal{F}^{\text{an}}}}^{\Sigma}(\mathbf{PreShv}(\mathbf{AnSm}/(\mathcal{F}^{\text{an}}, \mathcal{I}), \mathfrak{M})) \end{aligned}$$

pour les structures projectives stables déduites des structures semi-projectives $(\mathbb{A}^1, \text{Nis})$ -locale et $(\mathbb{D}^1, \text{usu})$ -locale.

Définition 4.2. Soit $(\mathcal{F}, \mathcal{I})$ un diagramme de k -schémas de type fini. La réalisation de Betti au dessus de \mathcal{F} est le foncteur composé

$$\mathrm{Betti}_{\mathcal{F}} : \mathrm{SH}_{\mathfrak{M}}(\mathcal{F}, \mathcal{I}) \xrightarrow{\mathrm{LAn}_{\mathcal{F}}^*} \mathrm{SH}_{\mathfrak{M}}^{\mathrm{an}}(\mathcal{F}^{\mathrm{an}}, \mathcal{I}) \xleftarrow{\sim} \mathbb{D}_{\mathfrak{M}}(\mathcal{F}^{\mathrm{an}}, \mathcal{I}).$$

Soit $(f, \alpha) : (\mathcal{G}, \mathcal{J}) \rightarrow (\mathcal{F}, \mathcal{I})$ un morphisme de diagrammes de k -schémas de type fini. On dispose d'un carré commutatif (à un isomorphisme près) d'adjonctions de Quillen

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Spect}_{T_{\mathcal{F}}}^{\Sigma}(\mathrm{PreShv}(\mathrm{Sm}/(\mathcal{F}, \mathcal{I}), \mathfrak{M})) & \xrightarrow{((f, \alpha)^*, (f, \alpha)_*)} & \mathrm{Spect}_{T_{\mathcal{G}}}^{\Sigma}(\mathrm{PreShv}(\mathrm{Sm}/(\mathcal{G}, \mathcal{J}), \mathfrak{M})) \\ \downarrow (\mathrm{An}_{\mathcal{F}}^*, \mathrm{An}_{\mathcal{F}*}) & & \downarrow (\mathrm{An}_{\mathcal{G}}^*, \mathrm{An}_{\mathcal{G}*}) \\ \mathrm{Spect}_{T_{\mathcal{F}}^{\mathrm{an}}}^{\Sigma}(\mathrm{PreShv}(\mathrm{AnSm}/(\mathcal{F}^{\mathrm{an}}, \mathcal{I}), \mathfrak{M})) & \xrightarrow{((f^{\mathrm{an}}, \alpha)^*, (f^{\mathrm{an}}, \alpha)_*)} & \mathrm{Spect}_{T_{\mathcal{G}}^{\mathrm{an}}}^{\Sigma}(\mathrm{PreShv}(\mathrm{AnSm}/(\mathcal{G}^{\mathrm{an}}, \mathcal{J}), \mathfrak{M})). \end{array}$$

Lorsque (f, α) est lisse argument par argument, on a également un carré commutatif d'adjonctions de Quillen

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Spect}_{T_{\mathcal{G}}}^{\Sigma}(\mathrm{PreShv}(\mathrm{Sm}/(\mathcal{G}, \mathcal{J}), \mathfrak{M})) & \xrightarrow{((f, \alpha)_{\#}, (f, \alpha)^*)} & \mathrm{Spect}_{T_{\mathcal{F}}}^{\Sigma}(\mathrm{PreShv}(\mathrm{Sm}/(\mathcal{F}, \mathcal{I}), \mathfrak{M})) \\ \downarrow (\mathrm{An}_{\mathcal{G}}^*, \mathrm{An}_{\mathcal{G}*}) & & \downarrow (\mathrm{An}_{\mathcal{F}}^*, \mathrm{An}_{\mathcal{F}*}) \\ \mathrm{Spect}_{T_{\mathcal{G}}^{\mathrm{an}}}^{\Sigma}(\mathrm{PreShv}(\mathrm{AnSm}/(\mathcal{G}^{\mathrm{an}}, \mathcal{J}), \mathfrak{M})) & \xrightarrow{((f^{\mathrm{an}}, \alpha)_{\#}, (f^{\mathrm{an}}, \alpha)^*)} & \mathrm{Spect}_{T_{\mathcal{F}}^{\mathrm{an}}}^{\Sigma}(\mathrm{PreShv}(\mathrm{AnSm}/(\mathcal{F}^{\mathrm{an}}, \mathcal{I}), \mathfrak{M})). \end{array}$$

relativement aux structures projectives stables déduites des structures projectives (et non semi-projectives!). On a donc le résultat suivant.

Lemme 4.3. Pour tout morphisme de diagrammes de k -schémas de type fini $(f, \alpha) : (\mathcal{G}, \mathcal{J}) \rightarrow (\mathcal{F}, \mathcal{I})$, on dispose d'une transformation naturelle inversible

$$\theta_{(f, \alpha)} : (f, \alpha)^* \circ \mathrm{Betti}_{\mathcal{F}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Betti}_{\mathcal{G}} \circ (f, \alpha)^*$$

compatible à la composition des morphismes de diagrammes de k -schémas. Lorsque (f, α) est lisse argument par argument, la transformation naturelle

$$(f, \alpha)_{\#} \circ \mathrm{Betti}_{\mathcal{G}} \longrightarrow \mathrm{Betti}_{\mathcal{F}} \circ (f, \alpha)_{\#},$$

déduite de $\theta_{(f, \alpha)}^{-1}$ via les adjonctions $((f, \alpha)_{\#}, (f, \alpha)^*)$, est inversible.

Via les adjonctions $((f, \alpha)^*, (f, \alpha)_*)$, on déduit de $\theta_{(f, \alpha)}$ une transformation naturelle

$$\gamma_{(f, \alpha)} : \mathrm{Betti}_{\mathcal{F}} \circ (f, \alpha)_* \longrightarrow (f, \alpha)_* \circ \mathrm{Betti}_{\mathcal{G}}.$$

On a le résultat suivant.

Proposition 4.4. Soit $f : (\mathcal{G}, \mathcal{I}) \rightarrow (\mathcal{F}, \mathcal{I})$ un morphisme de \mathcal{I} -diagrammes de k -schémas de type fini (i.e., un morphisme de diagrammes induisant l'identité sur les catégories d'indices). Alors, la transformation naturelle

$$\gamma_f : \mathrm{Betti}_{\mathcal{F}} \circ f_* \longrightarrow f_* \circ \mathrm{Betti}_{\mathcal{G}}$$

est inversible lorsqu'elle est appliquée aux objets A de $\mathrm{SH}_{\mathfrak{M}}(\mathcal{G}, \mathcal{I})$ tels que $i^*(A)$ est compact pour tout $i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I})$.

Démonstration. Ceci découle facilement de la partie **(B)** du théorème 3.19 et du fait que le morphisme de changement de base $i^*f_* \longrightarrow f(i)_*i^*$ est inversible pour tout $i \in \text{Ob}(\mathcal{I})$. \square

Rappelons la construction des foncteurs cycles proches dans un dérivateur algébrique homotopique et stable \mathbb{H} (au sens de [2, Définition 2.4.13]). Le lecteur ne perdra rien à supposer que $\mathbb{H}(-, -) = \mathbb{SH}_{\mathfrak{M}}(-, -)$ ou $\mathbb{H} = \mathbb{SH}_{\mathfrak{M}}^{\text{an}}((-)^{\text{an}}, -)$. Pour un k -schéma X , on notera $\mathbf{H}(X) = \mathbb{H}(X, \mathbf{e})$ où \mathbf{e} est la catégorie finale. Dans [3, Définition 3.5.3] nous avons défini un diagramme de k -schémas lisses $(\mathcal{R}, \Delta \times \mathbb{N}^\times)$ muni d'un morphisme

$$(\theta, p_{\Delta \times \mathbb{N}^\times}) : (\mathcal{R}, \Delta \times \mathbb{N}^\times) \longrightarrow \mathbb{G}m_k.$$

Pour le moment, la définition exacte du diagramme \mathcal{R} ne jouera aucun rôle. Elle ne sera donc rappelée que plus tard. Étant donné un morphisme de k -schémas quasi-projectifs $f : X \longrightarrow \mathbb{A}_k^1$, on forme le diagramme commutatif à carrés cartésiens

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{R}_X & \xrightarrow{(\theta_f, p_{\Delta \times \mathbb{N}^\times})} & X_\eta & \xrightarrow{j} & X & \xleftarrow{i} & X_\sigma \\ \downarrow & & \downarrow f_\eta & & \downarrow f & & \downarrow f_\sigma \\ \mathcal{R} & \xrightarrow{(\theta, p_{\Delta \times \mathbb{N}^\times})} & \eta = \mathbb{G}m_k & \xrightarrow{j} & \mathbb{A}_k^1 & \xleftarrow{i} & o = \sigma. \end{array}$$

On considère le foncteur composé

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(X_\eta) &\xrightarrow{(\theta_f, p_{\Delta \times \mathbb{N}^\times})^*} \mathbb{H}(\mathcal{R}_X, \Delta \times \mathbb{N}^\times) \xrightarrow{(\theta_f)_*} \mathbb{H}(X_\eta, \Delta \times \mathbb{N}^\times) \\ &\xrightarrow{i^*j_*} \mathbb{H}(X_\sigma, \Delta \times \mathbb{N}^\times) \xrightarrow{(p_{\Delta \times \mathbb{N}^\times})^\#} \mathbf{H}(X_\sigma). \end{aligned}$$

Lorsque $\mathbf{H} = \mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(-)$, ce foncteur sera noté Ψ_f . Il est également connu sous le nom de foncteur « motif proche ». Lorsque $\mathbf{H} = \mathbf{D}_{\mathfrak{M}}((-)^{\text{an}})$ il sera noté $\Psi'_{f^{\text{an}}}$ pour le distinguer du vrai foncteur « cycles proches » $\Psi_{f^{\text{an}}}$ dont on trouvera une définition dans [7, Exposé XIV]. Cette définition sera d'ailleurs rappelée plus loin dans la section.

Proposition 4.5. *Il existe une transformation naturelle*

$$\omega_f : \text{Betti}_{X_\sigma} \circ \Psi_f \longrightarrow \Psi'_{f^{\text{an}}} \circ \text{Betti}_{X_\eta}$$

de foncteurs pseudo-monoïdaux, symétriques et pseudo-unitaires qui est inversible lorsqu'elle est appliquée aux objets compacts de $\mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(X_\eta)$. Les ω_f définissent un morphisme $\omega : \text{Betti} \circ \Psi \longrightarrow \text{Betti} \circ \Psi'$ de systèmes de spécialisation (au sens de [3, Définition 3.1.1]) de $\mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(-)|_{\text{Sch}/\mathbb{G}m_k}$ dans $\mathbf{D}_{\mathfrak{M}}((-)^{\text{an}})$.

Démonstration. Pour abréger les notations, on notera \mathcal{K} la catégorie $\Delta \times \mathbb{N}^\times$. La transformation ω_f est la composée des isomorphismes (de foncteurs pseudo-monoïdaux)

$$\begin{aligned} \text{Betti}_{X_\sigma} p_{\mathcal{K}\#} &\simeq p_{\mathcal{K}\#} \text{Betti}_{(X_\sigma, \mathcal{K})}, & \text{Betti}_{(X_\sigma, \mathcal{K})} i^* &\simeq i^* \text{Betti}_{(X, \mathcal{K})}, \\ \text{Betti}_{(X, \mathcal{K})} j_* &\longrightarrow j_* \text{Betti}_{(X_\eta, \mathcal{K})}, & \text{Betti}_{(X_\eta, \mathcal{K})} \theta_{f*} &\longrightarrow \theta_{f*} \text{Betti}_{\mathcal{R} \times_{\mathbb{G}m_k} X_\eta}, \\ \text{Betti}_{\mathcal{R} \times_{\mathbb{G}m_k} X_\eta} (\theta_f, p_{\mathcal{K}})^* &\simeq (\theta_f, p_{\mathcal{K}})^* \text{Betti}_{X_\eta}. \end{aligned}$$

En particulier, le fait que ω_f est inversible après application aux objets compacts découle de la proposition 4.4. Par ailleurs, les foncteurs $\text{Betti}_{X_\sigma} \circ \Psi_f$ et $\Psi'_{f^{\text{an}}} \circ \text{Betti}_{X_\eta}$ définissent des systèmes de spécialisation monoïdaux. Ceci découle immédiatement du théorème 3.19 et plus précisément de la commutativité de la réalisation de Betti avec les foncteurs « image directe » suivant un morphisme projectif. La vérification que ω est un morphisme de systèmes de spécialisation est facile et sera laissée en exercice. \square

La seconde étape consiste à construire une transformation naturelle $\Psi'_{f^{\text{an}}} \rightarrow \Psi_{f^{\text{an}}}$. Pour cela, on a besoin de rappeler la construction du diagramme \mathcal{R} ou plutôt son analytifié \mathcal{R}^{an} . Le diagramme \mathcal{R}^{an} est construit en appliquant [3, Lemme 3.4.1] au diagramme de diagrammes d'espaces analytiques complexes

$$(\mathcal{E}^{\text{an}}, \mathbb{N}^\times) \Longrightarrow (\mathcal{E}^{\text{an}}, \mathbb{N}^\times) \xleftarrow{1} (pt, \mathbb{N}^\times)$$

avec \mathcal{E}^{an} la tour des revêtements étales finis de \mathbb{G}_m^{an} . Formons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} (\mathbb{A}^{1,\text{an}}, \mathbb{N}^\times) & \Longrightarrow & (\mathbb{A}^{1,\text{an}}, \mathbb{N}^\times) & \xleftarrow{0} & (pt, \mathbb{N}^\times) \\ \text{(r,id)} \downarrow & & \downarrow \text{(r,id)} & & \parallel \\ (\mathcal{E}^{\text{an}}, \mathbb{N}^\times) & \Longrightarrow & (\mathcal{E}^{\text{an}}, \mathbb{N}^\times) & \xleftarrow{1} & (pt, \mathbb{N}^\times) \end{array}$$

où la ligne supérieure est formée de diagrammes constants et $r(n) : \mathbb{A}^{1,\text{an}} \rightarrow \mathbb{G}_m^{\text{an}}$ est la fonction analytique $z \mapsto \exp(n^{-1} \cdot z)$. On déduit ainsi un morphisme de $(\Delta \times \mathbb{N}^\times)$ -diagrammes d'espaces analytiques

$$r : (\mathcal{C}, \Delta) \times (pt, \mathbb{N}^\times) \longrightarrow (\mathcal{R}^{\text{an}}, \Delta \times \mathbb{N}^\times)$$

avec \mathcal{C} l'espace analytique cosimplicial obtenu en appliquant [3, Lemme 3.4.1] à

$$\mathbb{A}^{1,\text{an}} \Longrightarrow \mathbb{A}^{1,\text{an}} \xleftarrow{0} pt.$$

Pour la suite, on introduit quelques notations.

Notation 4.6. On note

$$(\phi, p_\Delta) : (\mathcal{C}, \Delta) \longrightarrow \mathbb{A}_{\text{an}}^1$$

le morphisme déduit du diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{A}^{1,\text{an}} & \Longrightarrow & \mathbb{A}^{1,\text{an}} & \xleftarrow{0} & pt \\ \parallel & & \downarrow & & \parallel \\ \mathbb{A}^{1,\text{an}} & \longrightarrow & pt & \Longrightarrow & pt. \end{array}$$

On note aussi $q : \Delta \times \mathbb{N}^\times \longrightarrow \Delta$ la projection sur le premier facteur. Avec ces notations, on a un diagramme commutatif de diagrammes d'espaces analytiques complexes

$$\begin{array}{ccc}
 (\mathcal{C} \circ q, \Delta \times \mathbb{N}^\times) & \xrightarrow{r} & (\mathcal{R}^{\text{an}}, \Delta \times \mathbb{N}^\times) \\
 (\phi, p_{\Delta \times \mathbb{N}^\times}) \downarrow & \searrow (\varphi, p_{\Delta \times \mathbb{N}^\times}) & \downarrow (\theta^{\text{an}}, p_{\Delta \times \mathbb{N}^\times}) \\
 \mathbb{A}^{1, \text{an}} & \xrightarrow{r(1)} & \mathbb{G}^{\text{m an}} \\
 & \searrow r(n) & \nearrow e_n \\
 & & \mathbb{G}^{\text{m an}}
 \end{array} \quad (4.2)$$

avec e_n le morphisme d'élévation à la puissance n . Soit $f : X \longrightarrow \mathbb{A}^{1, \text{an}}$ un morphisme d'espaces analytiques complexes. On note $X_\eta = f^{-1}(\mathbb{G}^{\text{m an}})$ et j son inclusion dans X . On note aussi $X_\sigma = f^{-1}(o)$ et i son inclusion dans X . On obtient de (4.2) un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 (\mathcal{C}_X \circ q, \Delta \times \mathbb{N}^\times) & \xrightarrow{r_f} & (\mathcal{R}_X^{\text{an}}, \Delta \times \mathbb{N}^\times) \\
 (\phi_f, p_{\Delta \times \mathbb{N}^\times}) \downarrow & \searrow (\varphi_f, p_{\Delta \times \mathbb{N}^\times}) & \downarrow (\theta_f^{\text{an}}, p_{\Delta \times \mathbb{N}^\times}) \\
 \mathbb{A}^{1, \text{an}} \times_{\mathbb{G}^{\text{m an}}} X_\eta & \xrightarrow{r_f(1)} & X_\eta \\
 & \searrow r_f(n) & \nearrow e_{n, f} \\
 & & \mathbb{G}^{\text{m an}} \times_{e_n, \mathbb{G}^{\text{m an}}} X_\eta
 \end{array} \quad (4.3)$$

par changement de base suivant $f_\eta : X_\eta \longrightarrow \mathbb{G}^{\text{m an}}$.

Muni des notations précédentes, on définit cinq foncteurs $\Psi'_f, \Psi_f^1, \Psi_f^2, \Psi_f^3$ et $\chi_{n, f}$ respectivement par les composés suivants :

$$\mathbf{D}_{\mathfrak{M}}(X_\eta) \xrightarrow{(\theta_f^{\text{an}}, p_{\Delta \times \mathbb{N}^\times})^*} \mathbf{D}_{\mathfrak{M}}(\mathcal{R}_X^{\text{an}}, \Delta \times \mathbb{N}^\times) \xrightarrow{(\theta_f^{\text{an}})^*} \mathbf{D}_{\mathfrak{M}}(X_\eta, \Delta \times \mathbb{N}^\times) \xrightarrow{i^* j_*} \mathbf{D}_{\mathfrak{M}}(X_\sigma, \Delta \times \mathbb{N}^\times) \xrightarrow{(p_{\Delta \times \mathbb{N}^\times})^\#} \mathbf{D}_{\mathfrak{M}}(X_\sigma),$$

$$\mathbf{D}_{\mathfrak{M}}(X_\eta) \xrightarrow{(\varphi_f, p_{\Delta \times \mathbb{N}^\times})^*} \mathbf{D}_{\mathfrak{M}}(\mathcal{C}_X \circ q, \Delta \times \mathbb{N}^\times) \xrightarrow{(\varphi_f)^*} \mathbf{D}_{\mathfrak{M}}(X_\eta, \Delta \times \mathbb{N}^\times) \xrightarrow{i^* j_*} \mathbf{D}_{\mathfrak{M}}(X_\sigma, \Delta \times \mathbb{N}^\times) \xrightarrow{(p_{\Delta \times \mathbb{N}^\times})^\#} \mathbf{D}_{\mathfrak{M}}(X_\sigma),$$

$$\mathbf{D}_{\mathfrak{M}}(X_\eta) \xrightarrow{(\varphi_f, p_\Delta)^*} \mathbf{D}_{\mathfrak{M}}(\mathcal{C}_X, \Delta) \xrightarrow{(\varphi_f)^*} \mathbf{D}_{\mathfrak{M}}(X_\eta, \Delta) \xrightarrow{i^* j_*} \mathbf{D}_{\mathfrak{M}}(X_\sigma, \Delta) \xrightarrow{(p_\Delta)^\#} \mathbf{D}_{\mathfrak{M}}(X_\sigma),$$

$$\mathbf{D}_{\mathfrak{M}}(X_\eta) \xrightarrow{r_f(1)^*} \mathbf{D}_{\mathfrak{M}}(\mathbb{A}^{1, \text{an}} \times_{\mathbb{G}^{\text{m an}}} X_\eta) \xrightarrow{r_f(1)^*} \mathbf{D}_{\mathfrak{M}}(X_\eta) \xrightarrow{i^* j_*} \mathbf{D}_{\mathfrak{M}}(X_\sigma),$$

et

$$\mathbf{D}_{\mathfrak{M}}(X_\eta) \xrightarrow{e_{n, f}^*} \mathbf{D}_{\mathfrak{M}}(\mathbb{G}^{\text{m an}} \times_{e_n, \mathbb{G}^{\text{m an}}} X_\eta) \xrightarrow{e_{n, f}^*} \mathbf{D}_{\mathfrak{M}}(X_\eta) \xrightarrow{i^* j_*} \mathbf{D}_{\mathfrak{M}}(X_\sigma).$$

Les morphismes de diagrammes d'espaces analytiques complexes r_f induisent des transformations naturelles de foncteurs pseudo-monoidaux symétriques et unitaires $\Psi'_f \longrightarrow \Psi_f^1$

(construites comme dans [3, Définition 3.2.11]). Ces transformations naturelles forment un morphisme de systèmes de spécialisation au sens analytique du terme (voir [3, Définition 3.1.1]). De même on dispose d'un morphisme de systèmes de spécialisation $\chi_n \rightarrow \Psi^3$. Par ailleurs, on a le lemme suivant.

Lemme 4.7. *Il existe des isomorphismes naturels (de foncteurs pseudo-monoïdaux, symétriques et pseudo-unitaires) $\Psi_f^1 \simeq \Psi_f^2$ et $\Psi_f^2 \simeq \Psi_f^3$ qui sont des isomorphismes de systèmes de spécialisation au sens analytique du terme (voir [3, Définition 3.1.1]).*

Démonstration. Pour un objet A de $\mathbf{D}\mathfrak{M}(X_\eta)$, $\Psi_f^1(A)$ est la colimite homotopique du \mathbb{N}^\times -diagramme constant de valeur $\Psi_f^2(A)$, i.e., $\Psi_f^1(A) \simeq (p_{\mathbb{N}^\times})_\# p_{\mathbb{N}^\times}^* \Psi_f^2(A)$ avec $p_{\mathbb{N}^\times} : \mathbb{N}^\times \rightarrow \mathbf{e}$. De plus, le morphisme $\Psi^1 \rightarrow \Psi^2$ s'identifie à la counité de $(p_{\mathbb{N}^\times}^*, (p_{\mathbb{N}^\times})_\#)$. Or, l'ensemble ordonné \mathbb{N}^\times admet un plus grand élément à savoir 1 (\mathbb{N}^\times étant ordonné par l'opposée de la relation de divisibilité). Il vient que le morphisme de counité $(p_{\mathbb{N}^\times})_\# p_{\mathbb{N}^\times}^* \rightarrow \text{id}$ est inversible (voir par exemple [2, Proposition 2.1.41]).

Passons à l'isomorphisme $\Psi_f^2 \simeq \Psi_f^3$. La catégorie Δ admet un objet final, à savoir $\mathbf{0}$. Il vient que la counité de l'adjonction $((p_\Delta)_\#, p_\Delta^*)$ est inversible. Il suffirait donc de prouver que Ψ^2 est isomorphe au foncteur composé

$$\begin{aligned} \mathbf{D}\mathfrak{M}(X_\eta) &\xrightarrow{(\exp_f, p_\Delta)^*} \mathbb{D}\mathfrak{M}(\mathbb{A}^{1,\text{an}} \times_{\mathbb{G}\text{m}^{\text{an}}} X_\eta, \Delta) \xrightarrow{\exp_{f*}} \mathbb{D}\mathfrak{M}(X_\eta, \Delta) \\ &\xrightarrow{i^* j_*} \mathbb{D}\mathfrak{M}(X_\sigma, \Delta) \xrightarrow{(p_\Delta)_\#} \mathbf{D}\mathfrak{M}(X_\sigma). \end{aligned}$$

On montrera plus précisément que le morphisme d'unité $\text{id} \rightarrow (\phi_f)_* (\phi_f)^*$ est inversible avec ϕ_f le morphisme évident d'espaces analytiques complexes cosimpliciaux $(\mathcal{C}_X, \Delta) \rightarrow (\mathbb{A}^{1,\text{an}} \times_{\mathbb{G}\text{m}^{\text{an}}} X_\eta, \Delta)$. Il suffit alors de montrer que le morphisme d'unité $\text{id} \rightarrow \phi_f(\underline{n})_* \phi_f(\underline{n})^*$ est inversible pour tout $n \in \mathbb{N}$. Mais, $\mathcal{C}_X(\underline{n}) \simeq (\mathbb{A}^{1,\text{an}} \times_{\mathbb{G}\text{m}^{\text{an}}} X_\eta) \times \mathbb{A}^{n,\text{an}}$ et $\phi_f(\underline{n})$ est la projection sur le premier facteur. Le résultat découle alors de l'invariance par homotopie. \square

Rappelons la définition du foncteur « cycles proches » Ψ_f associé à un morphisme $f : X \rightarrow \mathbb{A}^{1,\text{an}}$ d'espaces analytiques complexes. Notons $E = \mathbb{A}^{1,\text{an}} \coprod \{(-\infty)\}$ muni de la topologie caractérisée par :

- $E - \{(-\infty)\}$ est un ouvert de E et l'identité $\mathbb{A}^{1,\text{an}} \rightarrow E - \{(-\infty)\}$ est un homéomorphisme ;
- un système cofinal de voisinages ouverts de $(-\infty)$ est donné par les $V_N = \{(-\infty)\} \coprod \{z \in \mathbb{C}, \text{Re}(z) < -N\}$ avec $N \in \mathbb{N}$.

La fonction analytique $r(1) = \exp : \mathbb{A}^{1,\text{an}} \rightarrow \mathbb{A}^{1,\text{an}}$ s'étend par continuité en une application

$$\exp' : E \longrightarrow \mathbb{A}^{1,\text{an}}$$

en posant $\exp'(-\infty) = 0$. On a ainsi un diagramme à carrés cartésiens

$$\begin{array}{ccccc} E_\eta = \mathbb{A}^{1,\text{an}} & \xrightarrow{\bar{j}} & E & \xleftarrow[-\infty]{\bar{i}} & pt \\ \exp \downarrow & & \downarrow \exp' & & \parallel \\ \mathbb{G}\mathfrak{m}^{\text{an}} & \xrightarrow{j} & \mathbb{A}^{1,\text{an}} & \xleftarrow[0]{i} & pt. \end{array}$$

En faisant le changement de base suivant f , on obtient le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} E_\eta \times_{\mathbb{A}^{1,\text{an}}} X & \xrightarrow{\bar{j}} & E \times_{\mathbb{A}^{1,\text{an}}} X & \xleftarrow[-\infty]{\bar{i}} & X_\sigma \\ \exp_f \downarrow & & \downarrow \exp'_f & & \parallel \\ X_\eta & \xrightarrow{j} & X & \xleftarrow[i]{i} & X_\sigma. \end{array}$$

On pose, suivant [7, Exposé XIV], $\Psi_f(A) = \bar{i}^* \bar{j}_* \exp_f^* A$. On dispose d'une transformation naturelle

$$\Psi_f^3 = i^* j_* \exp_{f*} \exp_f^* \longrightarrow i^* \exp'_{f*} \bar{j}_* \exp_f^* \longrightarrow \text{id}_{X_\sigma} \bar{i}^* \bar{j}_* \exp_f^* \simeq \Psi_f.$$

La conclusion de la discussion précédente est le résultat suivant.

Proposition 4.8. *Soit $f : X \rightarrow \mathbb{A}_k^1$ un morphisme de k -schémas de type fini. Il existe une transformation naturelle de foncteurs pseudo-monoïdaux symétriques et pseudo-unitaires*

$$\varpi_X : \text{Betti}_{X_\sigma} \circ \Psi_f \longrightarrow \Psi_{f^{\text{an}}} \circ \text{Betti}_{X_\eta}.$$

Les ϖ_γ définissent un morphisme $\varpi : \text{Betti} \circ \Psi \rightarrow \text{Betti} \circ \Psi$ de systèmes de spécialisation de $\mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(-)_{|\text{Sch}/\mathbb{G}\mathfrak{m}_k}$ vers $\mathbf{D}_{\mathfrak{M}}((-)^{\text{an}})$ au sens de [3, Définition 3.1.1]. De plus, on a un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} \text{Betti}_{X_\sigma} \circ \chi_{n,f} & \longrightarrow & \chi_{n,f^{\text{an}}} \circ \text{Betti}_{X_\eta} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Betti}_{X_\sigma} \circ \Psi_f & \longrightarrow & \Psi_{f^{\text{an}}} \circ \text{Betti}_{X_\eta} \end{array}$$

avec $\chi_{n,f} = i^* j_* e_{n,f*} e_{n,f}^*$. (Voir les notations 4.6 dans le cas analytique.)

Démonstration. La transformation naturelle ϖ_f est la composée

$$\begin{aligned} \text{Betti}_{X_\sigma} \Psi_f &\xrightarrow{\omega_f} \Psi'_{f^{\text{an}}} \text{Betti}_{X_\eta} \longrightarrow \Psi_{f^{\text{an}}}^1 \text{Betti}_{X_\eta} \simeq \Psi_{f^{\text{an}}}^2 \text{Betti}_{X_\eta} \\ &\simeq \Psi_{f^{\text{an}}}^3 \text{Betti}_{X_\eta} \longrightarrow \Psi_{f^{\text{an}}} \text{Betti}_{X_\eta}. \end{aligned}$$

Il s'agit bien d'un morphisme de systèmes de spécialisation comme il découle de la proposition 4.5 et du fait que $\Psi'_\gamma \rightarrow \Psi_\gamma^1$, les isomorphismes du lemme 4.7 et $\Psi_\gamma^3 \rightarrow \Psi_\gamma$ sont

des morphismes des systèmes de spécialisation (au sens analytique du terme). Les flèches verticales du carré de l'énoncé proviennent des triangles commutatifs

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{R} \circ (\text{id} \times n), \Delta \times \mathbb{N}^\times) & \longrightarrow & (\mathcal{R}, \Delta \times \mathbb{N}^\times) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{G}_{\text{m}_k} & \xrightarrow{e_n} & \mathbb{G}_{\text{m}_k}, \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{A}^{1,\text{an}} & \xrightarrow{r(n)} & \mathbb{G}_{\text{m}}^{\text{an}} \\ & \searrow \exp & \downarrow e_n \\ & & \mathbb{G}_{\text{m}}^{\text{an}}. \end{array}$$

La commutativité du carré est facile et sera laissée en exercice. □

On peut maintenant énoncer et démontrer le théorème principal de cette section.

Théorème 4.9. *Pour tout morphisme de type fini $f : X \rightarrow \mathbb{A}_k^1$, la transformation naturelle*

$$\varpi_X : \text{Betti}_{X_\sigma} \circ \Psi_f \longrightarrow \Psi_{f^{\text{an}}} \circ \text{Betti}_{X_\eta}$$

est inversible lorsqu'elle est appliquée aux objets constructibles de $\mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(X_\eta)$.

Démonstration. Soit A la classe des objets de la forme $\text{Sus}_T^p(\text{Spec}(k) \otimes \dagger)$ avec $\dagger \in \mathbf{Ho}(\mathfrak{M})$ compact et $p \in \mathbb{N}$. Il vient (voir la preuve du théorème 3.19) que compact est synonyme de A -constructible pour les objets de $\mathbf{SH}_{\mathfrak{M}}(-)$. Soit π une indéterminée de sorte que $\mathbb{A}_k^1 = \text{Spec}(k[\pi])$. Pour $n \in \mathbb{N}$, considérons les deux \mathbb{A}_k^1 -schémas

$$b_n : B_n = \text{Spec}(k[\pi, T]/T^n - \pi) \longrightarrow \text{Spec}(k[\pi])$$

et

$$b_n^1 : B_n^1 = \text{Spec}(k[\pi, T, U, U^{-1}]/T^n - U \cdot \pi) \longrightarrow \text{Spec}(k[\pi]).$$

Par [3, Théorème 3.3.46], pour montrer que ϖ est inversible sur les objets compacts, il suffit de vérifier que

$$\text{Betti}_{(B_n)_\sigma} \circ \Psi_{b_n} (b_n)_\eta^* A|_{\mathbb{G}_{\text{m}_k}} \longrightarrow \Psi_{b_n^{\text{an}}} \circ \text{Betti}_{(B_n)_\eta} (b_n)_\eta^* A|_{\mathbb{G}_{\text{m}_k}}$$

et

$$\text{Betti}_{(B_n^1)_\sigma} \circ \Psi_{b_n^1} (b_n^1)_\eta^* A|_{\mathbb{G}_{\text{m}_k}} \longrightarrow \Psi_{b_n^{1,\text{an}}} \circ \text{Betti}_{(B_n^1)_\eta} (b_n^1)_\eta^* A|_{\mathbb{G}_{\text{m}_k}}$$

sont inversibles pour tout $A \in A$.

Le 2-foncteur homotopique stable $\mathbf{D}_{\mathfrak{M}}((-)^{\text{an}})$ est séparé au sens de [2, Définition 2.1.160]. En utilisant le revêtement étale

$$B'_n = k[\pi, T', V, V^{-1}]/(T'^n - \pi) \longrightarrow B_n^1 = k[\pi, T, U, U^{-1}]/(T^n - U \cdot \pi),$$

donné sur les anneaux de fonctions par les associations $U \rightsquigarrow V^n$ et $T \rightsquigarrow T'V^{-1}$, on peut remplacer ci-dessus $b_n^1 : B_n^1 \rightarrow \mathbb{A}_k^1$ par $b'_n : B'_n \rightarrow \mathbb{A}_k^1$. Or, B'_n est lisse au dessus de B_n . Il est donc suffisant de vérifier que

$$\text{Betti}_{(B_n)_\sigma} \circ \Psi_{b_n} (b_n)_\eta^* A|_{\mathbb{G}_{\text{m}_k}} \longrightarrow \Psi_{b_n^{\text{an}}} \circ \text{Betti}_{(B_n)_\eta} (b_n)_\eta^* A|_{\mathbb{G}_{\text{m}_k}} \quad (4.4)$$

est inversible pour $n \in \mathbb{N}^\times$ et $A \in \mathbf{Ho}(\mathfrak{M})$. Il revient au même de montrer que

$$\mathrm{Betti}_\sigma \circ \Psi_{\mathrm{id}}(b_n)_{\eta*}(b_n)_\eta^* A|_{\mathbb{G}m_k} \longrightarrow \Psi_{\mathrm{id}} \circ \mathrm{Betti}_\eta(b_n)_{\eta*}(b_n)_\eta^* A|_{\mathbb{G}m_k} \quad (4.5)$$

est inversible (puisque b_n est fini et donc projectif).

On peut supposer que k contient l'ensemble des racines n -èmes de l'unité qu'on notera $\mu_n(k)$. On a un isomorphisme $\mu_n(k)$ -équivariant

$$\Psi_{\mathrm{id}}(b_n)_{\eta*}(b_n)_\eta^* A|_{\mathbb{G}m_k} \simeq \bigoplus_{\xi \in \mu_n(k)} A$$

(voir [3, Proposition 3.5.12]). De même, on montre que

$$\Psi_{\mathrm{id}} \mathrm{Betti}_\eta(b_n)_{\eta*}(b_n)_\eta^* A|_{\mathbb{G}m_k} \simeq \bigoplus_{\xi \in \mu_n(k)} \mathrm{Betti}_\sigma A.$$

Il s'agit de montrer que modulo ces identifications, le morphisme (4.5) est l'identité. Pour vérifier cela, on utilise le carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Betti}_\sigma \circ \chi_{n,\mathrm{id}}(b_n)_{\eta*}(b_n)_\eta^* A|_{\mathbb{G}m_k} & \longrightarrow & \chi_{n,\mathrm{id}} \circ \mathrm{Betti}_\eta(b_n)_{\eta*}(b_n)_\eta^* A|_{\mathbb{G}m_k} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Betti}_\sigma \circ \Psi_{\mathrm{id}}(b_n)_{\eta*}(b_n)_\eta^* A|_{\mathbb{G}m_k} & \longrightarrow & \Psi_{\mathrm{id}} \circ \mathrm{Betti}_\eta(b_n)_{\eta*}(b_n)_\eta^* A|_{\mathbb{G}m_k}. \end{array} \quad (4.6)$$

Montrons que la flèche horizontale supérieure de ce carré s'identifie à l'identité de

$$\bigoplus_{\xi \in \mu_n(k)} \mathrm{Betti}_\sigma(A \oplus A(-1)[-1]).$$

Remarquons que le $\mathbb{G}m_k$ -schéma $(B_n)_\eta$ est isomorphe à $e_n : \mathbb{G}m_k \longrightarrow \mathbb{G}m_k$. On a donc un carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{\xi \in \mu_n(k)} (B_n)_\eta & \xrightarrow{\coprod \mathrm{id}} & (B_n)_\eta \\ \downarrow \coprod u_\xi & & \downarrow \\ \mathbb{G}m_k & \xrightarrow{e_n} & \mathbb{G}m_k \end{array}$$

où u_ξ est l'isomorphisme correspondant à la section inversible $\xi \cdot T$ du faisceau structural de $(B_n)_\eta$. Par construction de χ_n , on a

$$\chi_{n,\mathrm{id}}(b_n)_{\eta*}(b_n)_\eta^* A|_{\mathbb{G}m_k} \simeq \bigoplus_{\xi \in \mu_n(k)} \chi_{1,\mathrm{id}} u_{\xi*} u_\xi^* A|_{\mathbb{G}m_k} \simeq \bigoplus_{\xi \in \mu_n(k)} \chi_{1,\mathrm{id}} A|_{\mathbb{G}m_k}.$$

Un calcul similaire montre que

$$\chi_{n,\mathrm{id}} \mathrm{Betti}_\eta(b_n)_{\eta*}(b_n)_\eta^* A|_{\mathbb{G}m_k} \simeq \bigoplus_{\xi \in \mu_n(k)} \chi_{1,\mathrm{id}} \mathrm{Betti}_\eta A|_{\mathbb{G}m_k}.$$

De plus, modulo ces identifications, la flèche horizontale supérieure de (4.6) est la somme directe des isomorphismes évidents $\mathrm{Betti}_\sigma \chi_{1,\mathrm{id}} A|_{\mathbb{G}_{m,k}} \simeq \chi_{1,\mathrm{id}} \mathrm{Betti}_\eta A|_{\mathbb{G}_{m,k}}$. Or $\chi_{1,\mathrm{id}} A|_{\mathbb{G}_{m,k}} \simeq A \oplus A(-1)[-1]$ (voir [2, Corollaire 1.6.2]). Il en est de même dans le contexte analytique. D'où la description recherchée de la flèche horizontale supérieure de (4.6).

Pour terminer, il suffit de voir que les flèches verticales de (4.6) s'identifient à la somme directe des projections $(\mathrm{id}, 0) : \mathrm{Betti}_\sigma A \oplus \mathrm{Betti}_\sigma A(-1)[-1] \longrightarrow \mathrm{Betti}_\sigma A$. Ceci découle de [3, Lemme 3.5.10] en utilisant la méthode de la preuve de [3, Corollaire 3.5.12]. Le théorème est démontré. \square

Références

1. M. ARTIN, A. GROTHENDIECK ET J.-L. VERDIER, Théorie des topos et cohomologie étale des schémas (SGA 4 III), en *Séminaire de géométrie algébrique du Bois-Marie 1963–1964*, Lecture Notes in Mathematics, Volume 305 (Springer, 1972).
2. J. AYOUB, *Les six opérations de Grothendieck et le formalisme des cycles évanescents dans le monde motivique I*, Astérisque, Volume 314 (2007).
3. J. AYOUB, *Les six opérations de Grothendieck et le formalisme des cycles évanescents dans le monde motivique II*, Astérisque, Volume 315 (2007).
4. J. AYOUB, Motifs de variétés analytiques rigides, preprint (2008; available at www.math.uiuc.edu/K-theory/0907).
5. J. AYOUB ET S. ZUCKER, Relative Artin motives and the reductive Borel–Serre compactification of a locally symmetric variety, preprint (2009; available at www.math.uiuc.edu/K-theory/0993).
6. K. S. BROWN ET S. M. GERSTEN, *Algebraic K-theory and generalized sheaf cohomology*, Lecture Notes in Mathematics, Volume 341, pp. 266–292 (Springer, 1973).
7. P. DELIGNE ET N. KATZ, Groupes de monodromie en géométrie algébrique (SGA 7 II), en *Séminaire de géométrie algébrique du Bois-Marie 1967–1969*, Lecture Notes in Mathematics, Volume 340 (Springer, 1973).
8. D. DUGGER, S. HOLLANDER ET D. ISAKSEN, Hypercovers and simplicial presheaves, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **136** (2004), 9–51.
9. H. GRAUERT ET R. REMMERT, *Coherent analytic sheaves*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Volume 265 (Springer, 1984).
10. H. HIRONAKA, Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero, I, II, *Annals Math.* **2**(79) (1964), 109–326.
11. M. KASHIWARA ET P. SCHAPIRA, *Sheaves on manifolds*, Comprehensive Studies in Mathematics, Volume 292 (Springer, 1994).
12. F. MOREL ET V. VOEVODSKY, \mathbb{A}^1 -homotopy theory of schemes, *Publ. Math. IHES* **90** (1999), 45–143.
13. J. RIOU, Catégorie homotopique stable d'un site suspendu avec intervalle, *Bull. Soc. Math. France* **135**(4) (2007), 495–547.
14. M. SAITO, Mixed Hodge modules, *Publ. RIMS Kyoto* **26** (1990), 221–333.